ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

La (17) ci dà in particolare

$$u_k(-x) = (-1)^k k! \left[\frac{u_k(x)}{k!} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(1+\alpha)\dots(1+\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\dots(1-\alpha^n)} \cdot \frac{u_{n+k}(x)}{(n+k)!} \right].$$

Dalla (17) poi, facendo $x=1$ ed $h=x$, ricaviamo il seguente sviluppo per la $u_k(x)$:

$$u_k(x) = k!\, x^k \left[\frac{u_k(1)}{k!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{u_{n+k}(1)}{(n+k)!} (1-x)(1-\alpha x)\dots(1-\alpha^{n-1} x) \right].$$

Matematica. — *Su di una classe di equazioni alle derivate funzionali.* Nota II di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

5. Supponiamo per primo che il nucleo $K(\xi, \eta)$ sia simmetrico e tale che il sistema delle sue funzioni parametriche associate $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi), \dots$ possa rendersi ortogonale e normale, il che d'ora innanzi supporremo sempre sia già stato fatto. Inoltre supponiamo che, se i suoi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ non sono in numero finito, le due serie $\Sigma_h P_h/|\lambda_h|$ e $\Sigma_h P_h^2/|\lambda_h|$, dove P_h è il massimo di $|\psi_h(\xi)|$, siano entrambe convergenti.

In queste ipotesi, com'è noto, la serie $\Sigma_h \psi_h(\xi)\psi_h(\eta)/\lambda_h$ è uniformemente convergente ed ha per somma $K(\xi, \eta)$; pertanto la (7) potrà scriversi

$$\frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} = \alpha(\xi, z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)}{\lambda_h} \int_0^1 \psi_h(\xi)\, \Phi(\eta, z)\, d\eta$$

da cui, identificando ψ_h con f e giovandosi delle (8), (10) e (11),

$$\frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} = \alpha(\xi, z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h}, \tag{12}$$

dove si è posto

$$\mu_h(z) = c_h e^{z/\lambda_h} + \int_0^1 \psi_h(\xi)\, \gamma_h(\xi, z)\, d\xi, \quad \gamma_h(\xi, z) = e^{z/\lambda_h} \int_0^z \alpha(\xi, z)\, e^{-z/\lambda_h}\, dz, \tag{13}$$
$$(h = 1, 2, \dots),$$

essendo le c_h delle costanti arbitrarie.

[1] Presentata nella seduta del 2 maggio 1921.

È facile vedere che la serie $\Sigma_h\, \psi_h(\xi)\, \mu_h(z) / \lambda_h$ è assolutamente ed uniformemente convergente, purchè l'insieme delle costanti arbitrarie c_h sia limitato. Infatti, supposto che $|c_h| < \mathrm{L}$, $|\alpha(\xi, z)| < \mathrm{M}$, $|\mathrm{K}(\xi, \eta)| < \mathrm{N}$, $|z| < \mathrm{Z}$, tenendo conto che $|\lambda_h|$ ammette come limite inferiore $1/\mathrm{N}$, si trova che

$$|\gamma_h(\xi, z)| < \mathrm{MZ}\, e^{2\mathrm{NZ}},$$

dal che segue

$$\Sigma_h \left| \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h} \right| < \mathrm{L} e^{\mathrm{NZ}} \Sigma_h \frac{\mathrm{P}_h}{|\lambda_h|} + \mathrm{MZ}\, e^{2\mathrm{NZ}} \Sigma_h \frac{\mathrm{P}_h^2}{|\lambda_h|},$$

ciò che dimostra l'assunto.

Dalla (12), integrando rispetto a z, potrà pertanto dedursi

$$\Phi(\xi, z) = \omega(\xi) + \beta(\xi, z) + \Sigma_h\, \psi_h(\xi)\, \nu_h(z), \tag{14}$$

avendo indicato con $\omega(\xi)$ una funzione arbitraria ed avendo posto

$$\beta(\xi, z) = \int_0^z \alpha(\xi, z)\, dz, \quad \nu_h(z) = \frac{1}{\lambda_h} \int_0^z \mu_h(z)\, dz = \mu_h(z) + \int_0^1 \psi_h(\xi)\, \beta(\xi, z)\, d\xi. \tag{15}$$

La (14) risolve l'equazione integro-differenziale (7). La funzione arbitraria che in essa compare come termine additivo, rappresenta manifestamente il valore iniziale di Φ per $z = 0$. Il fatto che questo valore iniziale compaia così semplicemente nella formula, consente di calcolare la funzione V di Jacobi senz'alcuna difficoltà.

6. Esaminiamo ora il caso che il nucleo K sia asimmetrico, escludendo, pel momento, che esso sia privo di parametri e supponendo che siano sempre verificate le ipotesi fatte in principio del § precedente. Consideriamo il nucleo simmetrico

$$\mathrm{G}(\xi, \eta) = \Sigma_h \frac{\psi_h(\xi)\, \psi_h(\eta)}{\lambda_h}, \tag{16}$$

che ha gli stessi parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ di K e ammette le $\psi_1, \psi_2, \ldots$ come funzioni parametriche a questi rispettivamente corrispondenti. Inoltre, come si verifica immediatamente, si ha $\overset{**}{\mathrm{G}}\overset{**}{\mathrm{K}}(\xi, \eta) = \overset{**}{\mathrm{G}}{}^2(\xi, \eta)$, ove il doppio asterisco indica l'operazione di composizione di 2ª specie ([1]).

Ciò premesso, osserviamo che la (7) può anche scriversi

$$\partial\Phi / \partial z = \alpha(\xi, z) + \overset{**}{\mathrm{K}}\overset{**}{\Phi}(\xi, z), \tag{7'}$$

da cui, componendo con G a sinistra e ponendo $\overset{**}{\mathrm{G}}\overset{**}{\Phi}(\xi, z) = \Psi(\xi, z)$, si

([1]) Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, pag. 179.

ricava subito

$$\frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} = \ddot{\mathrm{G}}\ddot{\alpha}(\xi, z) + \int_0^1 \mathrm{G}(\xi, \eta)\, \Psi(\eta, z)\, d\eta . \tag{17}$$

L'equazione (17) cui siamo così pervenuti è della stessa forma della (7) ma con nucleo simmetrico; ad essa potrà pertanto applicarsi l'analisi del § precedente traendone

$$\frac{\partial \Psi(\xi, z)}{\partial z} = \ddot{\mathrm{G}}\ddot{\alpha}(\xi, z) + \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \overline{\mu}(z)}{\lambda_h} \tag{18}$$

dove $\overline{\mu}_h$ denota ciò che diviene la funzione μ_h allorchè al posto di $\alpha(\xi, z)$ si sostituisce $\ddot{\mathrm{G}}\ddot{\alpha}(\xi, z)$. Nella (18) sostituiamo a Ψ il suo valore e teniamo conto che, com'è facile verificare, $\overline{\mu}(z) = \mu_h(z) / \lambda_h$; avremo così

$$\int_0^1 \mathrm{G}(\xi, \eta)\, \overline{\Phi}(\eta, z)\, d\eta = \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h^2} \quad , \quad \overline{\Phi}(\eta, z) = \frac{\partial \Phi(\eta, z)}{\partial z} - \alpha(\eta, z) .$$

È questa un'equazione integrale di Fredholm, 1ª specie in $\overline{\Phi}$, a nucleo simmetrico; però la funzione fuori integrale è data come una combinazione lineare delle funzioni parametriche del nucleo. Essa è perciò facilmente risolubile e precisamente, in virtù di una nota formula, si ha

$$\overline{\Phi}(\xi, z) = \frac{\partial \Phi(\xi, z)}{\partial z} - \alpha(\xi, z) = \sum_h \frac{\psi_h(\xi)\, \mu_h(z)}{\lambda_h}$$

da cui, integrando rispetto a z, si deduce

$$\Phi(\xi, z) = \omega(\xi) + \beta(\xi, z) + \Sigma_h\, \psi_h(\xi)\, \nu_h(z) ,$$

che non è altro che la (14): resta pertanto dimostrato che questa formula è valida ancorchè il nucleo non sia simmetrico.

7. Resta finalmente da considerare il caso che il nucleo K sia privo di parametri. Integriamo la (7′) rispetto a z e indichiamo brevemente con Γ l'operazione distributiva definita dall'uguaglianza

$$\Gamma\Phi(\xi, \eta) = \omega(\xi) + \beta(\xi, \eta) + \ddot{\mathrm{K}}\left(\int_0^z \ddot{\Phi}(\xi, z)\, dz\right)(\xi, z) ,$$

dove Φ denota una funzione qualsiasi di due variabili; l'equazione che si ottiene potrà allora scriversi simbolicamente $\Phi = \Gamma\Phi$. Ciò mostra, in virtù del teorema di Schroeder generalizzato (1) applicato all'operazione funzionale $\boldsymbol{\Gamma}$, che se, partendo da una certa funzione iniziale qualsiasi Φ_0 si costruisce la successione di iterate

$$\Phi_0 \,,\; \Phi_1 = \Gamma\Phi_0 \,,\; \Phi_2 = \Gamma\Phi_1 \,,\; \Phi_3 = \Gamma\Phi_2 \,, \ldots ,$$

tutte le volte che questa successione è convergente il suo limite è una soluzione della (7′).

Assumiamo $\Phi_0 = 0$; allora, com'è facile vedere, si ha

$$\Phi_{n+1} = \omega + \left(z\ddot{\mathrm{K}} + \frac{z^2}{2!}\ddot{\mathrm{K}}^2 + \cdots + \frac{z^n}{n!}\ddot{\mathrm{K}}^n \right) \ddot{\omega} + \beta + \ddot{\mathrm{K}}\ddot{\beta}_1 + \cdots + \ddot{\mathrm{K}}^n \ddot{\beta}_n \,,$$
$$(n = 0 \,, 1 \,, 2 \,, \ldots) \,,$$

avendo posto

$$\beta_1(\xi \,, z) = \int_0^z \beta(\xi \,, z)\, dz \;\;;\;\; \beta_{h+1}(\xi \,, z) = \int_0^z \beta_h(\xi \,, z)\, dz \,, \quad (h = 1 \,, 2 \,, \ldots).$$

Ne segue che se le due serie

$$\mathrm{H}_1(\xi \,, \eta | z) = \sum_1^\infty{}_n\, z^n \ddot{\mathrm{K}}^n / n! \quad , \quad \mathrm{H}_2(\xi \,, z) = \beta + \sum_1^\infty{}_n \ddot{\mathrm{K}}^n \ddot{\beta}_n$$

sono convergenti, si avrà la soluzione

$$\Phi(\xi \,, z) = \omega(\xi) + \int_0^1 \mathrm{H}_1(\xi \,, \eta | z)\, \omega(\eta)\, d\eta + \mathrm{H}_2(\xi \,, z) \tag{19}$$

che per $z = 0$ si riduce manifestamente alla funzione arbitraria $\omega(\xi)$.

Ora si verifica subito che

$$|z^n \ddot{\mathrm{K}}^n| < (\mathrm{ZN})^n \,, \quad |\ddot{\mathrm{K}}^n \ddot{\beta}_n| < \mathrm{MZ}^{n+1} |\ddot{\mathrm{K}}^n| \,, \tag{20}$$

dunque la serie H_1 ammette come maggiorante la serie esponenziale $\Sigma_n (\mathrm{ZN})^n / n!$ epperò è sempre assolutamente ed uniformemente convergente. Quanto alla serie H_2 essa, in virtù della 2ª delle (20), ammetterà come maggiorante la serie $\mathrm{MZ}^2 \, \Sigma_n \mathrm{Z}^{n-1} |\ddot{\mathrm{K}}^n|$ e cioè, prescindendo dal fattore MZ^2, la serie dei moduli corrispondente allo sviluppo in serie di Z del nucleo risolvente dell'equazione di Fredholm

$$\varphi(\xi) - \mathrm{Z} \int_0^1 \mathrm{K}(\xi \,, \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta = f(\xi) \,.$$

(1) Cfr. Tricomi, *Sull'iterazione delle funzioni di linee* [Giorn. di Mat. di Battaglini, vol. 55 (1917)].

Ma essendo per ipotesi K un nucleo privo di parametri, il nucleo risolvente di quest'equazione è una funzione olomorfa di Z, dunque l'accennata serie dei moduli sarà convergente, epperò la serie H_2 convergerà assolutamente ed uniformemente e la (19) resta quindi pienamente legittimata.

Se $\alpha(\xi, \eta) = 0$, allora pure $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0$ e la serie H_2 sparisce dalla (19), che perciò in questo caso resta valida incondizionatamente ancorchè K abbia dei parametri. Si ritrova così la formola stabilita dal prof. Volterra [1] in questo caso particolare.

Astronomia. — *Sulla massa e il moto proprio del sistema 40 Eridani.* Nota di GIORGIO ABETTI, presentata dal Socio A. DI LEGGE.

Il sistema *40 Eridani* ($\Sigma\, 518 \equiv \beta$GC 2109; $\alpha = 4^h\, 10^m.7'$, $\delta = -7°\,49'$, Eq. 1900), scoperto da W. Herschel nel 1783, è costituito da tre componenti, di cui la A, di grandezza 4,5, ha uno dei maggiori moti proprî conosciuti, comune anche alle altre componenti B e C di grandezze 9,4 e 10,8. La componente B dista da A, all'epoca presente, 83″ e da C 3″; con questa, B forma un sistema binario con un'orbita del periodo di 180 anni e con una eccentricità che è la più piccola conosciuta per i sistemi binari visuali.

Un'orbita precisa non potrà essere calcolata fino a che non si conosca con più esattezza la forma dell'orbita apparente nel quarto quadrante; tuttavia una buona approssimazione è certo data dai seguenti elementi di Doolittle che soddisfano bene alle osservazioni eseguite dalla scoperta fino a quelle ultime di Aitken [2] del 1912.

40 Eridani — Coppia BC

$$\begin{aligned} P &= 180.03^{a} \\ T &= 1843.18 \\ e &= 0.134 \\ a &= 4.79 \\ \Omega &= 150°.8 \\ i &= 63°.25 \\ \omega &= 319°.55\,. \end{aligned}$$

(1) Nota già cit.: *Sulle equazioni alle derivate funzionali.*
(2) Lick Observatory Publ., vol. XII, pag. 29.