ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

argento, di aggiungere al metallo fuso prima della solidificazione un po' di salnitro.

Se la ricristallizzazione è prodotta, come molti ritengono, dalla tensione superficiale, questa notevole influenza che impurezze gassose esercitano sulla ricristallizzazione non può meravigliare, poichè, alla stessa maniera che per i liquidi, è presumibile che le impurezze producano l'abbassamento della tensione superficiale anche nei solidi.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale.* Nota I del dottor ALBERTO MARIO BEDARIDA, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

1. — Sia D un numero intero razionale e consideriamo le forme aritmetiche, binarie, quadratiche di Dirichlet:

$$f \equiv (a\,,b\,,c) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2\,, \tag{1}$$

appartenenti al corpo $K(\sqrt{-1})$, o campo di Gauss, a determinante $b^2 - ac = D$.

Indichiamo con $p_1\,, p_2\,, \dots, p_r$ i fattori razionali, primi, dispari, diversi di D, per i quali sia $p_i \equiv 3$ (mod. 4), $(i = 1\,, 2\,, \dots, r)$, quindi primi anche nel corpo $K(\sqrt{-1})$ ed invece con $q_1\,, q_2\,, \dots q_s$ i suoi fattori razionali, primi, dispari, diversi, per i quali sia $q_j \equiv 1$ (mod. 4), $(j = 1\,, 2\,, \dots, s)$, quindi scindibili, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, in due fattori primi coniugati $q_j = \pi_j \pi_{j_0}$; e poniamo $\pi_j = \pi'_j + i\pi''_j$ ed inoltre $r + s = n$.

Osserviamo che, nel seguito, le forme che considereremo saranno sempre del tipo delle (1) ed inoltre, primitive di prima specie, cioè a, b, c ed a, $2b$, c, saranno due terne di numeri primi tra di loro, nel corpo $K(\sqrt{-1})$; e ciò sarà inteso tacitamente.

Consideriamo ora i generi definiti dalle seguenti relazioni [1].

$$\left[\frac{f}{p_1}\right] = +1\,, \left[\frac{f}{p_2}\right] = +1\,, \dots, \left[\frac{f}{p_r}\right] = +1\,, \tag{2}$$

$$\left[\frac{f}{\pi_1}\right]\left[\frac{f}{\pi_{1_0}}\right] = +1\,, \left[\frac{f}{\pi_2}\right]\left[\frac{f}{\pi_{2_0}}\right] = +1\,, \dots, \left[\frac{f}{\pi_s}\right]\left[\frac{f}{\pi_{s_0}}\right] = +1\,,$$

$$\alpha = (-1)^{1/4(f_1^2 + f_2^2 - 1)} = +1\,,\ \beta = (-1)^{1/8[(f_1 + f_2)^2 - 1]} = +1\,.$$

$$\gamma = (-1)^{f_2} = +1\,;$$

[1] Per la teoria dei generi delle forme di Dirichlet, cfr. la mia Nota: *Il genere nelle forme aritmetiche di Dirichlet, secondo un teorema di Eisenstein*. Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. LIV, fasc. VI-X (1921).

ove con f_1 ed f_2 indichiamo rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario della forma f. Notiamo esplicitamente che i caratteri α, β e γ potranno anche non comparire tutti e tre, ma almeno uno, e ciò può venire precisato facilmente ricorrendo alla tabella inserita a pagina 212 della mia Nota ora citata, e tenendo presente che il determinante è razionale.

I generi definiti dalle (2) si diranno, con Hilbert, *generi della specie principale.* Il loro numero è, manifestamente, 2^s.

Scopo del presente lavoro è di determinare, basandoci *unicamente* sopra la teoria delle forme aritmetiche, le diverse categorie di classi di forme (¹) aritmetiche di Dirichlet, determinanti D, appartenenti ai generi della specie principale (²).

2. — Introduciamo le seguenti definizioni: diremo *classe razionale,* una classe di forme aritmetiche di Dirichlet, a determinante D, quando contiene una, e quindi infinite forme a coefficienti interi, razionali; *classe complessa,* nel caso opposto.

La classe principale, contenendo la forma $(1, 0, -D)$, è razionale. Manifestamente le classi razionali costituiscono un sotto-gruppo del gruppo di composizione (³) delle classi di forme di Dirichlet considerate. Segue: *il numero delle classi razionali è sempre un divisore del numero totale delle classi.*

Consideriamo una classe razionale e sia m un intero razionale, rappresentato (propriamente o no) dalle sue forme e primo con 2D. Per note relazioni tra il simbolo di Dirichlet e quello di Legendre (⁴), nel corpo $K(\sqrt{-1})$, abbiamo:

$$\left[\frac{m}{p_i}\right] = \left(\frac{m^2}{p_i}\right) = +1\ (i = 1, 2, \dots, r);\ \left[\frac{m}{\pi_j}\right] = \left(\frac{m\,\pi'_j}{q_j}\right),\ \left[\frac{m}{\pi_{j_0}}\right] = \left(\frac{m\,\pi'_j}{q_j}\right)$$

quindi

$$\left[\frac{m}{\pi_j}\right]\left[\frac{m}{\pi_{j_0}}\right] = +1 \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

(¹) L'equivalenza da noi considerata è l'equivalenza propria, quella cioè rispetto al gruppo delle sostituzioni aritmetiche $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ove $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

(²) Hilbert, nella sua Memoria: *Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper.* Math. Ann. 45 Bd., ha notato (§ 9 seg.) degli speciali corpi di Dirichlet, in cui certe classi di ideali appartengono a determinati generi, che chiamò appunto generi della specie principale. Agli ideali di questi corpi speciali di Dirichlet corrispondono le forme di Dirichlet, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, a determinante intero razionale che noi consideriamo in questo lavoro.

(³) Sulla composizione delle forme di Dirichlet, cfr. Bianchi: *Sulle forme a coefficienti ed indeterminate complesse.* Atti Acc. Lincei, serie 4ª, vol. V, fasc. 8, pag. 589.

(⁴) Cfr. Dirichlet: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes.* Crelle's Journal, 24 Bd.

ed inoltre è, manifestamente: $\alpha = +1$, $\beta = +1$, $\gamma = +1$ ben inteso, tenendo presente quanto si è detto intorno a questi ultimi tre caratteri. Si ha dunque: *le classi razionali appartengono ai generi della specie principale.* Con questo, abbiamo una prima categoria di classe di forme di Dirichlet, appartenenti ai detti generi.

Segue da quanto ora si è detto: *una classe di forme aritmetiche, a determinante* D, *per la quale, tra i caratteri* $\left[\dfrac{f}{p_i}\right]$, *ove* p_i *è un fattore primo, dispari, razionale* $e \equiv 3$ *(mod. 4) di* D, *e di caratteri* α, β e γ *(od alcuni di essi), almeno uno sia* -1, *è una classe complessa.*

Da quest'ultima considerazione risulta l'esistenza, in generale, delle classi complesse e così pure l'esistenza di generi contenenti esclusivamente classi complesse.

È facile vedere che: *il numero delle classi razionali è sempre un divisore del numero delle classi complesse.*

Consideriamo le classi di forme aritmetiche di Dirichlet a determinante D (primitive di prima specie) che contengono una, e quindi infinite, forme del tipo (a, ib, c) ove a, b, c sono interi razionali, tali che $-b^2 - ac = \mathrm{D}$.

Tali classi saranno denominate: *classi del tipo* P. Esistono classi del tipo P, razionali. (Ad esempio quelle contenenti forme del tipo (a, o, c), ove a e c sono interi razionali tali che $-ac = \mathrm{D}$). Inoltre, notiamo che *esistono classi del tipo* P, *complesse.* Infatti, considerata una forma (a, b, c) a coefficienti interi, razionali, a determinante $-\mathrm{D}$, primitiva di prima specie, appartenente ad una classe non ancipite [1], la forma $(a, ib, -c)$ apparterrà ad una classe P_1 di forme del tipo P, a determinante D, non ancipite, manifestamente, e quindi complessa, perchè se fosse razionale la classe P_1 coinciderebbe con la classe coniugata [2] $\mathrm{P}_{1_0} = \mathrm{P}_1^{-1}$, cioè P sarebbe ancipite, il che non può essere.

Si ha ora: *le classi complesse del tipo* P, *appartengono ai generi della specie principale.* Invero ciò è evidente quando si pensi che le forme di tali classi rappresentano dei numeri interi, razionali e primi con 2D.

Abbiamo quindi una seconda categoria di classi di forme aritmetiche di Dirichlet, appartenenti ai generi suddetti.

Notiamo che la totalità delle classi del tipo P, a determinante D, costituiscono, come le classi razionali, un sotto-gruppo del gruppo di composizione delle classi di forme di Dirichlet, considerate e quindi: *il numero delle classi del tipo* P, *è sempre un divisore del numero totale delle classi.*

(1) Una classe di forme (primitive di prima specie) si dice ancipite od ambigua, quando composta con sè stessa offre la classe principale.

(2) Cfr. N° seguente.

Componiamo ora una classe razionale, non del tipo P, con una classe complessa del tipo P, si ottiene una classe che, per quanto si è esposto, non è razionale e non è del tipo P. *Le classi così ottenute appartengono ai generi della specie principale*, poichè appartengono al genere composto di due generi dalle specie principale, che è ancora un tale genere.

Si ha quindi, in queste classi, una terza categoria di classi appartenenti ai generi in considerazione.

Noi ci proponiamo ora di dimostrare che non esistono altre categorie di classi di forme di Dirichlet, a determinante D, appartenenti ai generi della specie principale. Per questo è necessario premettere due lemma, che esamineremo nel numero seguente.

Matematica. — *Sul teorema di reciprocità delle funzioni di Green.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In uno dei miei primi lavori (1) dimostrai, per le varie funzioni di Green d'ordine m, un teorema di reciprocità, analogo a quello ben noto sulla ordinaria funzione di Green, e poco dopo trovai l'interpretazione fisica (2) del teorema di reciprocità sulla funzione di Green di ordine 2.

In seguito ritornai sull'argomento (3) per stabilire altre proprietà di tali funzioni.

Tale teorema di reciprocità si rivelò assai utile nella risoluzione del problema delle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate (4).

In questo breve scritto espongo una nuova dimostrazione, semplicissima, del citato teorema di reciprocità, valendomi di considerazioni analoghe a quelle che ho fatto in altra occasione (5), per stabilire la trasformazione delle funzioni poliarmoniche, mediante un'inversione per raggi vettori reciproci.

1. Sia τ lo spazio limitato da una superficie chiusa σ, e consideriamo

(1) T. Boggio: *Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque* (Atti R. Accademia Scienze di Torino; vol. XXXV, a. 1900). Nel seguito citerò questo lavoro colla notazione B_1.

(2) T. Boggio: *Sull'equilibrio delle piastre elastiche incastrate* (questi Rendiconti, serie 5a, vol. X, 1° semestre 1901).

(3) T. Boggio: *Sulle funzioni di Green d'ordine m* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XX, a. 1905). Nel seguito citerò questo lavoro colla notazione B_2.

(4) G. Lauricella: *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate* (questi Rendiconti; serie 5a, vol. XVII, 2° sem. 1908).

(5) T. Boggio: *Sopra una trasformazione delle funzioni poliarmoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; tomo LXVIII, a. 1909).