ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Componiamo ora una classe razionale, non del tipo P, con una classe complessa del tipo P, si ottiene una classe che, per quanto si è esposto, non è razionale e non è del tipo P. *Le classi così ottenute appartengono ai generi della specie principale*, poichè appartengono al genere composto di due generi dalle specie principale, che è ancora un tale genere.

Si ha quindi, in queste classi, una terza categoria di classi appartenenti ai generi in considerazione.

Noi ci proponiamo ora di dimostrare che non esistono altre categorie di classi di forme di Dirichlet, a determinante D, appartenenti ai generi della specie principale. Per questo è necessario premettere due lemma, che esamineremo nel numero seguente.

Matematica. — *Sul teorema di reciprocità delle funzioni di Green.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In uno dei miei primi lavori (1) dimostrai, per le varie funzioni di Green d'ordine m, un teorema di reciprocità, analogo a quello ben noto sulla ordinaria funzione di Green, e poco dopo trovai l'interpretazione fisica (2) del teorema di reciprocità sulla funzione di Green di ordine 2.

In seguito ritornai sull'argomento (3) per stabilire altre proprietà di tali funzioni.

Tale teorema di reciprocità si rivelò assai utile nella risoluzione del problema delle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate (4).

In questo breve scritto espongo una nuova dimostrazione, semplicissima, del citato teorema di reciprocità, valendomi di considerazioni analoghe a quelle che ho fatto in altra occasione (5), per stabilire la trasformazione delle funzioni poliarmoniche, mediante un'inversione per raggi vettori reciproci.

1. Sia τ lo spazio limitato da una superficie chiusa σ, e consideriamo

(1) T. Boggio: *Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green d'ordine qualunque* (Atti R. Accademia Scienze di Torino; vol. XXXV, a. 1900). Nel seguito citerò questo lavoro colla notazione B_1.

(2) T. Boggio: *Sull'equilibrio delle piastre elastiche incastrate* (questi Rendiconti, serie 5ª, vol. X, 1° semestre 1901).

(3) T. Boggio: *Sulle funzioni di Green d'ordine m* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XX, a. 1905). Nel seguito citerò questo lavoro colla notazione B_2.

(4) G. Lauricella: *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate* (questi Rendiconti; serie 5ª, vol. XVII, 2° sem. 1908).

(5) T. Boggio: *Sopra una trasformazione delle funzioni poliarmoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; tomo LXVIII, a. 1909).

una funzione U, m-armonica in τ, cioè regolare in τ e che soddisfa ivi all'equazione indefinita

$$\Delta^m \mathrm{U} = 0 \ , \ \left(\Delta = \mathrm{div\,grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

È facile mostrare che *tale funzione si può esprimere come somma di funzioni potenziali* (d'ordine superiore e poliarmoniche) di strati semplici e doppi, distribuiti, con opportuna densità, sulla superficie σ.

Per semplicità, supporremo m pari.

Per questo, ricordiamo anzitutto la formula (B_1 § 3 , B_2 § 2):

$$(1) \qquad a\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \sum_0^{m-1}{}_i \int_\sigma (\Delta^i \mathrm{U} \,.\, \mathrm{D}\Delta^{m-i-1} r^\nu - \Delta^{m-i-1} r^\nu \,.\, \mathrm{D}\Delta^i \mathrm{U}) d\sigma ,$$

ove, per brevità, si è posto

$$a = 4\pi(2m-2)! \ , \ \nu = 2m-3 ,$$

ed r indica la distanza del punto generico P di τ da un punto variabile, e $\mathrm{D}f$ indica la derivata secondo la normale interna della funzione generica f.

Diciamo poi U′ la funzione m-armonica nello spazio indefinito τ' esterno alla superficie σ, che si comporta all'infinito come una funzione potenziale m-armonica, e che su σ soddisfa alle condizioni seguenti, ove $\mu = m/2$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta^i \mathrm{U}' = \Delta^i \mathrm{U} , \\ \mathrm{D}\Delta^i \mathrm{U}' = \mathrm{D}\Delta^i \mathrm{U} , \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1);$$

applicando alle funzioni U′ ed r^ν, che sono m-armoniche nello spazio τ', una nota formula (B_1 § 3 , B_2 § 2), si ottiene

$$0 = \sum_0^{m-1}{}_i \int_\sigma (\Delta^i \mathrm{U}' \,.\, \mathrm{D}\Delta^{m-i-1} r^\nu - \Delta^{m-i-1} r^\nu \,.\, \mathrm{D}\Delta^i \mathrm{U}') \, d\sigma ;$$

sottraendo dalla (1) e ricordando le (2), risulta

$$a\,\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \sum_\mu^{m-1}{}_i \int_\sigma [\Delta^i(\mathrm{U} - \mathrm{U}') \,.\, \mathrm{D}\Delta^{m-i-1} r^\nu - \Delta^{m-i-1} r^\nu \,.\, \mathrm{D}\Delta^i(\mathrm{U} - \mathrm{U}')] \, d\sigma ,$$

che può scriversi sotto la forma

$$(3) \qquad a\,\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \sum_0^n{}_i \int_\sigma (h_i \, \mathrm{D}\Delta^i r^\nu - \Delta^i r^\nu \,.\, \mathrm{D}h_i) \, d\sigma \ , \ (n = \mu - 1) ,$$

la quale dimostra la proprietà enunciata.

2. Consideriamo ora la funzione Γ, m-armonica in τ, e che nei punti M di σ soddisfa alle condizioni ai limiti:

$$(4) \qquad \mathrm{D}^i \Gamma = \mathrm{D}^i(\mathrm{MQ})^\nu \ , \ (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1) ,$$

MQ essendo la distanza del punto Q (polo), che si riguarda come fisso in τ, dal punto variabile M.

Questa funzione Γ dicesi *funzione preliminare di Green d'ordine m e di 1ª specie*, mentre la funzione $G = (MQ)^\nu - \Gamma$ si dice *funzione di Green d'ordine m e di 1ª specie*. La funzione Γ dipende dai punti M e Q e perciò possiamo indicare con $\Gamma(M, Q)$ il valore in M della funzione Γ avente per polo Q.

È facile vedere (B_1 § 2, B_2 § 3) che le (4) possono essere sostituite dalle seguenti (supposto m pari, come nel n. 1, ed $n = m/2 - 1$):

$$(4') \qquad \begin{cases} \Delta^i \Gamma(M, Q) = \Delta^i (MQ)^\nu, \\ D\Delta^i \Gamma(M, Q) = D\Delta^i (MQ)^\nu \end{cases} \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots, n).$$

Ciò premesso, se P è un altro punto qualunque di τ, calcoliamo il valore $\Gamma(P, Q)$ nel punto P, della funzione Γ avente per polo Q; basta applicare la (3), da cui si trae

$$(5) \quad a\Gamma(P, Q) = \sum_0^n{}_i \int_\sigma \{ h_i(Q, M) D_M \Delta^i (MP)^\nu - \Delta^i (MP)^\nu . D_M h_i(Q, M) \} \, d\sigma_M,$$

ove M è un punto variabile su σ, D_M indica la derivata normale interna a σ in M, e $d\sigma_M$ è l'elemento d'area attiguo ad M.

Applicando le (4'), si può pure scrivere

$$a\Gamma(P, Q) = \sum_0^n{}_i \int_\sigma \{ h_i(Q, M) D_M \Delta^i \Gamma(M, P) - \Delta^i \Gamma(M, P) . D_M h_i(Q, M) \} \, d\sigma_M;$$

ma, con una formula analoga alla (5), si ha

$$a\Gamma(M, P) = \sum_0^n{}_j \int_\sigma \{ h_j(P, N) D_N \Delta^j (NM)^\nu - \Delta^j (NM)^\nu . D_N h_j(P, N) \} \, d\sigma_N,$$

perciò, sostituendo,

$$a^2\Gamma(P, Q) = \sum_0^n{}_i \sum_0^n{}_j \int_\sigma \int_\sigma \{ h_i(Q, M) \, h_j(P, N) \, D_M D_N \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu -$$
$$- h_i(Q, M) \, D_M \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu . D_N h_j(P, N) - h_j(P, N) D_N \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu . D_M h_i(Q, M) +$$
$$+ \Delta^i \Delta^j (NM)^\nu . D_N h_j(P, N) . D_M h_i(Q, M) \} \, d\sigma_M \, d\sigma_N .$$

Ora è chiaro che il secondo membro non muta scambiando fra loro i punti P, Q; perciò si conclude: $\Gamma(P, Q) = \Gamma(Q, P)$, ciò che dimostra il teorema di reciprocità.

La stessa dimostrazione si applica se m è dispari, ovvero se τ è lo spazio indefinito esterno a σ, come pure se si considerano le funzioni di Green delle varie specie (B_1 § 6, B_2 § 4), anche nel caso di quante si vogliano variabili.