ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

les périodes de la fonction elliptique ζ étant quelconques. Toutefois, il y a des solutions qui échappent à la représentation (L_1):

$$(L_2) \qquad \varphi = -\frac{\alpha}{3}(\operatorname{cotg}\alpha x_0 + \operatorname{cotg}\alpha x_1 + \operatorname{cotg}\alpha x_2)\,,$$

$$(L_3) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right),$$

$$(L_4) \qquad \varphi = -\frac{\alpha}{3}\operatorname{cotg}\alpha x_i \qquad (i = 0\,,\,1\,,\,2)\,,$$

$$(L_5) \qquad \varphi = -\frac{1}{3}\frac{1}{x_i} \qquad (i = 0\,,\,1\,,\,2)\,,$$

$$(L_6) \qquad \varphi = \text{costante.}$$

On peut distinguer bien nettement les six possibilités. *Les plans des courbes de Segre enveloppent* toujours *un cône algébrique* $\boldsymbol{\Gamma}$ *de la* 3me *classe* et, suivant le cas,

(L_1) Γ est de genre *un*,

(L_2) Γ a un plan tangent double,

(L_3) Γ a un plan tangent stationnaire,

(L_4) et (L_5) Γ se décompose en un cône quadrique Γ_1 et en un faisceau dont l'axe, dans le cas (L_5), appartient a Γ_1.

(L_6) Γ se décompose en trois faisceaux.

Ce résultat permet de trouver les équations d'une surface L en termes finis. Pour cela, je renvoie à un mémoire qui paraîtra prochainement dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno.

Matematica. — *Sopra certe equazioni integrali considerate dal prof. Tedone.* Nota del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

1. Il prof. Tedone, dalla formula che si ottiene applicando il metodo di integrazione di Riemann all'equazione di Eulero e di Poisson con invarianti eguali, e particolarizzando opportunamente la forma del contorno e i dati su di esso, ha trovato che l'equazione integrale

$$(1) \qquad \int_1^x f_1(\xi)\,F\left[-\lambda\,,\lambda+1\,,1\,,-\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}\right]d\xi = f(x)\,,$$

con $f(1) = 0$, è risoluta dalla formula

$$(2) \quad f_1(x) = f'(x) + \int_1^x f(\xi)\,F'\left[-\lambda\,,\lambda+1\,,1\,,-\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}\right]\frac{d\xi}{2\xi}\,.\ ^{(1)}$$

(1) Ved. O. Tedone, questi Rendiconti, seduta 2 maggio 1920.

Nella (1) F è il solito simbolo di una funzione ipergeometrica costruita con i parametri $-\lambda, \lambda+1$ ed 1, mentre F', nella (2), è la derivata di questa funzione rispetto al quarto parametro. Posto, per brevità,

$$F_1[\sigma] = F[-\lambda, \lambda+1, 1, \sigma],$$

per la coesistenza delle (1) e (2) è necessario e sufficiente che sia verificata la relazione

$$(3)\quad \int_{\xi}^{\xi_0} F_1\left[-\frac{(t-\xi_0)^2}{4t\,\xi_0}\right] F'_1\left[-\frac{(t-\xi)^2}{4t\,\xi}\right]\frac{dt}{2t} = \xi\frac{\partial}{\partial\xi}F_1\left[-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\xi\,\xi_0}\right].$$

In questa Nota ci proponiamo principalmente di dare una dimostrazione diretta della (3).

Anzitutto, posto $x_0 = \dfrac{\xi_0}{\xi}$, $x = \dfrac{t}{\xi}$, alla (3) si può dare la forma

$$(4)\quad \int_1^{x_0} F_1\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4x\,x_0}\right] F'_1\left[-\frac{(1-x)^2}{4x}\right]\frac{dx}{2x} = \\ = -x_0\frac{d}{dx_0}F_1\left[-\frac{(1-x_0)^2}{4\,x_0}\right].$$

Ricordiamo poi che $F_1[\sigma]$ soddisfa all'equazione differenziale

$$(5)\quad \sigma(1-\sigma)F_1''[\sigma] + (1-2\sigma)F_1'[\sigma] + \lambda(\lambda+1)F_1[\sigma] = 0,$$

e che, posto $\sigma = -\dfrac{(x-x_0)^2}{4x\,x_0}$, abbiamo facilmente

$$(1-2\sigma)F_1'[\sigma] = -2x\frac{x^2+x_0^2}{x^2-x_0^2}\frac{\partial}{\partial x}F_1[\sigma],$$

$$\sigma(1-\sigma)F_1''[\sigma] = -x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_1[\sigma] + 2x\frac{x_0^2}{x^2-x_0^2}\frac{\partial}{\partial x}F_1[\sigma];$$

per cui la (5) si può scrivere

$$(6)\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_1[\sigma] + 2\frac{x}{x^2-x_0^2}\frac{\partial}{\partial x}F_1[\sigma] - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}F_1[\sigma] = 0.$$

Notiamo inoltre, che, facendo $x_0 = 1$, e ponendo $\tau = -\dfrac{(1-x)^2}{4x}$, si avrà, dalla (6),

$$(7)\quad \frac{d^2}{dx^2}F_1[\tau] + 2\frac{x}{x^2-1}\frac{d}{dx}F_1[\tau] - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2}F_1[\tau] = 0.$$

Dalle (6) e (7) deduciamo

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-x_0^2)\left\{F_1[\tau]\frac{\partial}{\partial x}F_1[\sigma] - F_1[\sigma]\frac{d}{dx}F_1[\tau]\right\} + \frac{1-x_0^2}{2x}F_1[\sigma]F_1'[\tau] = 0,$$

e di qui, moltiplicando per dx, e integrando, tra i limiti 1 e x_0, risulta

$$\int_1^{x_0} F_1[\sigma] F_1'[\tau] \frac{dx}{2x} = \left\{ F_1[\tau] \frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma] - F_1[\sigma] \frac{d}{dx} F_1[\tau] \right\}_{x=1}.$$

E poichè, per $x = 1$, poi

$$\frac{d}{dx} F_1[\tau] = 0, \frac{\partial}{\partial x} F_1[\sigma] = -x_0 \frac{d}{dx_0} F_1\left[-\frac{(1-x_0)^2}{4x\, x_0}\right],$$

segue, senz'altro, la (4).

2. In modo analogo al precedente si può dimostrare la formula

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_0 - x)\, I_0(x_1 - x)}{x_0 - x} dx = I_1(x_1 - x_0), \tag{8}$$

dimostrata anche per altra via dal prof. Tedone, che da essa ha dedotto la soluzione della equazione

$$\int_0^{x_0} I_0(x_0 - x)\, \varphi(x) dx = \Phi(x_0) - \Phi(0), \tag{9}$$

sotto la forma

$$\varphi(x_0) = \Phi'(x_0) - \int_0^{x_0} [\Phi(x) - \Phi(0)] \frac{I_1(x_0 - x)}{x_0 - x} dx, \tag{10}$$

e, quindi, di altre numerose equazioni integrali analoghe [1].

Nelle (8), (9) e (10), è

$$I_0(z) = \sum_0^\infty {}_n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

e $I_1(z) = I_0'(z)$.

Posto, nella (8), $x_1 - x_0 = \xi_0$, $x_1 - x = \xi$, risulta

$$\int_0^{\xi_0} I_0(\xi) \frac{I_1(\xi_0 - \xi)}{\xi_0 - \xi} d\xi = I_1(\xi_0). \tag{11}$$

Per dimostrare la (11) basta notare che

$$\xi I_0''(\xi) + I_0'(\xi) - \xi I_0(\xi) = 0, \tag{12}$$

e che, similmente,

$$(\xi_0 - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} I_0(\xi_0 - \xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\xi_0 - \xi) - (\xi_0 - \xi) I_0(\xi_0 - \xi) = 0. \tag{13}$$

Dalle (12) e (13) segue

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \left\{ I_0(\xi_0 - \xi) I_0'(\xi) - I_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(\xi_0 - \xi) \right\} - \xi_0 I_0(\xi) \frac{I_1(\xi_0 - \xi)}{\xi_0 - \xi} = 0;$$

e quindi, moltiplicando per $d\xi$, e integrando, tra i limiti 0 e ξ_0, otteniamo subito la (11).

[1] Questi Rendiconti, sedute 31 maggio 1913, 5 aprile 1914 e 21 marzo 1915.