ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Matematica. — *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. FRANCESCO SEVERI [1].

I tre tipi tradizionali di equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine in due variabili indipendenti: *ellittico, iperbolico* e *parabolico*, sono ben lungi dall'esaurire la classe di siffatte equazioni. Invero la determinazione del tipo dipende dal segno di una certa espressione formata coi coefficienti dell'equazione, espressione che, essendo funzione delle variabili indipendenti, in generale non conserverà lo stesso segno in tutto il piano x, y. Sempre che ciò accada, noi diremo che l'equazione è di *tipo misto*.

Lo studio di queste equazioni di tipo misto, per quanto sia a mia conoscenza, è stato finora completamente trascurato. Io ho voluto occuparmene pervenendo, con l'ausilio di quel possente strumento analitico costituito dalle equazioni integrali, ai risultati che mi accingo ad esporre per sommi capi qui appresso, riservando le dimostrazioni e tutti gli altri sviluppi ad una Memoria che sarà pubblicata appena possibile.

Un primo problema che mi si è presentato è stato quello della riduzione di un'equazione di tipo misto ad una forma da assumersi come canonica. Ho trovato che, con delle sostituzioni di variabili *reali*, è sempre possibile porre l'equazione sotto la forma

$$(1) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)\,z+d(x,y)=0.$$

Nella (1) la curva che separa le regioni in cui l'equazione è di tipi diversi (curva *parabolica*) è l'asse x, al disopra del quale (semipiano $y>0$) l'equazione è di tipo ellittico, cioè ha le sue *caratteristiche* immaginarie, mentre al disotto del medesimo (semipiano $y<0$) è di tipo iperbolico e le sue caratteristiche, reali, son rappresentate dall'equazione

$$(2) \qquad x=C\pm\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}\ , \qquad (C \text{ costante arbitraria}).$$

Procedendo oltre, ho limitato le mie considerazioni all'equazione

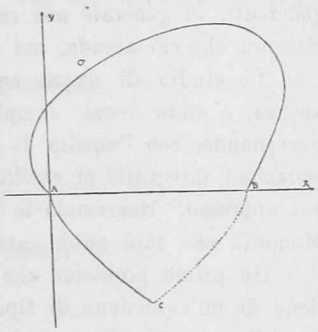
$$(E) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

che si ottiene uguagliando a zero la parte di 2° ordine della (1); così fa-

[1] Presentata nella seduta del 3 giugno 1921.

cendo son venuto ad imitare il processo di sviluppo storico, p. es. della teoria delle equazioni di tipo ellittico, che per un primo e non breve periodo si limitò soltanto alla più semplice di esse: l'equazione di Laplace $\Delta_2 z = 0$. Per l'equazione (E) mi è stato possibile risolvere il problema fondamentale della teoria delle equazioni a derivate parziali considerate dal punto di vista delle funzioni di variabili reali, e cioè quello di trovare le *condizioni al contorno* atte a determinare univocamente una soluzione particolare in un certo campo. Naturalmente si tratterà di un campo attraversato dalla curva parabolica, altrimenti il problema riguarderebbe solo apparentemente le equazioni di tipo misto.

Propriamente, servendomi del fatto che la (E) è una trasformata di una particolare equazione di Eulero-Poisson [1], ho cominciato col cercare di stabilire una relazione che legasse i valori $\tau(x)$ che una qualsiasi soluzione regolare [2] z della (E) riceve sul segmento AB staccato sull'asse x dalle due caratteristiche uscenti da un punto qualunque C del semipiano iperbolico, con quelli, $\varphi(x)$, che la medesima soluzione riceve sul pezzo di caratteristica AC, e coi valori $\nu(x)$ che $\partial z/\partial y$ riceve su AB. Supponendo per semplicità che le ascisse di A e B siano rispettivamente 0 ed 1, ho così trovato l'equazione



$$\tau(x) = \varphi_1(x) + \gamma \int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{3}} \nu(y)\, dy \tag{3}$$

dove $\varphi_1(x)$ è una funzione che si calcola facilmente nota che sia $\varphi(x)$, e γ è un coefficiente numerico.

Stabilita la (3), si perviene agevolmente al seguente TEOREMA DI UNICITÀ:

Non può esistere più di una soluzione regolare della (E) *assumente valori arbitrariamente fissati sul pezzo di caratteristica* AC *e su di una curva qualsiasi* σ *congiungente* A *con* B *senza uscire dal semipiano ellittico.*

Successivamente, nell'intento di giungere all'inversione di questo teorema, cioè a *dimostrare l'esistenza della soluzione di cui esso assicura l'unicità,* ho considerato anzitutto il caso preliminare che i valori di z siano assegnati sul contorno chiuso costituito dalla curva σ e dal segmento AB,

[1] Ved. G. Darboux, *Leçons sur la théorie gén. des surfaces etc.*, 2e éd. (Paris, Gauthier-Villars, 1914-15), t. II, pag. 54 e seg.

[2] Cioè finita e continua assieme alle sue derivate prime.

cominciando col dimostrare il teorema di esistenza nell'ipotesi che la curva σ sia una *curva normale*, cioè sia rappresentabile con una equazione del tipo

$$(4) \qquad (x-C)^2 + \frac{4}{9} y^3 = R^2 \qquad (C, R \text{ costanti}).$$

Indi, con un procedimento *alternato*, ho generalizzato il risultato ottenuto, continuando a supporre soltanto che la curva σ termini verso gli estremi A e B con due archetti, sia pur piccolissimi, della curva normale c che passa per A e B, e che, per la restante parte, non penetri mai nell'interno di c.

Questi risultati permettono agevolmente di riconoscere che il teorema di esistenza generale potrà considerarsi acquisito, sotto le restrizioni accennate, ove si riesca a dimostrare che è possibile calcolare effettivamente, tenendo conto delle imposte condizioni al contorno, i valori $\tau(x)$ che la soluzione z della (E) di cui occorre provare l'esistenza assume su AB. A questo scopo non può certo bastare la sola (3), figurando in quest'equazione anche la funzione $\nu(x)$ che è incognita al pari di $\tau(x)$. Dovremo dunque cercare di associare alla (3) un'altra equazione fra $\tau(x)$ e $\nu(x)$, da ricavarsi tenendo conto della circostanza che z assume sulla curva σ certi valori dati $f(\sigma)$.

Per ottenere questa seconda equazione, l'idea più naturale sarebbe quella di servirsi del metodo di Green. Però, nel caso in esame, questa via non conduce al risultato desiderato e bisogna invece ricorrere alla formula

$$(5) \qquad \tau(x) - \gamma \int_0^1 W^*(x, y)\, \tau(y)\, dy =$$
$$= f_1(x) - \gamma \int_0^1 \left[|x-y|^{-\frac{1}{3}} - (x+y-2xy)^{-\frac{1}{3}} \right] \nu(y)\, dy,$$

dove $W^*(x, y)$ è una funzione dipendente solo dalla forma di σ ed $f_1(x)$ una funzione dipendente anche da $f(\sigma)$; formula in certo modo analoga a quella di Green. La (5) sarà valida senza eccezioni per $0 \leq x \leq 1$ e le funzioni W^* ed f_1 si conserveranno sempre regolari nel medesimo intervallo, purchè siano soddisfatte certe condizioni sufficienti, fra cui la prima di quelle incontrate poco innanzi circa la forma di σ.

Noi supporremo senz'altro verificate queste condizioni. Allora la (5), riguardata come una equazione integrale di Fredholm, 2ª specie, in $\tau(x)$, sarà risolubile rispetto a questa funzione, permettendo, così di ricavarne il valore che, sostituito nella (3), dà luogo all'equazione unica in $\nu(x)$

$$(6) \qquad \int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{3}} \nu(y)\, dy =$$
$$= \int_0^1 \left[L(x, y) - |x-y|^{-\frac{1}{3}} + (x+y-2xy)^{-\frac{1}{3}} \right] \nu(y)\, dy + \psi(x),$$

dove $L(x, y)$ è una funzione dipendente solo dalla forma di σ, mentre $\psi(x)$ non dipende che dalle funzioni $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$. A questo punto tutto è ridotto a far vedere che è possibile risolvere quest'equazione.

La (6) è un'equazione integrale *di tipo misto* e *di prima specie* (1), alla quale però non è applicabile il metodo di riduzione ad equazione di Fredholm, 2ª specie, indicato dall'Andreoli (loc. cit.). Invece si riesce allo scopo servendosi della formula di Abel e giovandosi inoltre del concetto di *valor principale* di un integrale improprio, secondo Cauchy (2). Precisamente in questo modo, supposte esistenti e finite le derivate della funzione $\varphi(x)$, si riesce a trovare l'espressione esplicita di $v(x)$ per mezzo di un'altra funzione $\chi(x)$, la quale soddisfa ad una certa equazione integrale regolare di Fredholm, 2ª specie, che si vede facilmente esser sempre risolubile.

Trovata così $v(x)$ la (3) fornisce senz'altro $\tau(x)$.

Matematica. — *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali.* Nota di G. Vitali, presentata dal Corrispondente Tedone.

1. È noto che, se

$$\varphi_1(x)\ ,\ \varphi_2(x)\ ,\ \varphi_2(x)\ ,\ \ldots \tag{1}$$

è un sistema di funzioni definite per ogni x per cui $a \leq x \leq b$, sommabili (3) in (a, b) insieme coi loro quadrati, normali ed a due a due ortogonali, cioè tali per cui

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k\,, \end{cases}$$

condizione necessaria e sufficiente perchè le (1) formino un sistema chiuso, cioè tale che non esista alcuna soluzione *effettiva* (4) $\theta(x)$ del sistema di equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

(1) G. Andreoli, *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali* [Rendic. R. Acc. Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

(2) *Rés. des leçons sur le calcul infin.* (Paris, 1823); [*Ouvrages compl.* d'A. C., serie 2ª, tomo 4° (Paris, Gauthier-Villars, 1899), pag. 140].

(3) Nel senso di Lebesgue, ved. *Leçons sur l'intégration par H Lebesgue*, pag. 98 e seg. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

(4) Cioè tale che il gruppo dei punti in cui $\theta(x) \neq 0$ sia di misura > 0.