ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

dove $L(x, y)$ è una funzione dipendente solo dalla forma di σ, mentre $\psi(x)$ non dipende che dalle funzioni $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$. A questo punto tutto è ridotto a far vedere che è possibile risolvere quest'equazione.

La (6) è un'equazione integrale *di tipo misto* e *di prima specie* (1), alla quale però non è applicabile il metodo di riduzione ad equazione di Fredholm, 2ª specie, indicato dall'Andreoli (loc. cit.). Invece si riesce allo scopo servendosi della formula di Abel e giovandosi inoltre del concetto di *valor principale* di un integrale improprio, secondo Cauchy (2). Precisamente in questo modo, supposte esistenti e finite le derivate della funzione $\varphi(x)$, si riesce a trovare l'espressione esplicita di $\nu(x)$ per mezzo di un'altra funzione $\chi(x)$, la quale soddisfa ad una certa equazione integrale regolare di Fredholm, 2ª specie, che si vede facilmente esser sempre risolubile.

Trovata così $\nu(x)$ la (3) fornisce senz'altro $\tau(x)$.

Matematica. — *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali.* Nota di G. Vitali, presentata dal Corrispondente Tedone.

1. È noto che, se

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots \tag{1}$$

è un sistema di funzioni definite per ogni x per cui $a \leq x \leq b$, sommabili (3) in (a, b) insieme coi loro quadrati, normali ed a due a due ortogonali, cioè tali per cui

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k, \end{cases}$$

condizione necessaria e sufficiente perchè le (1) formino un sistema chiuso, cioè tale che non esista alcuna soluzione *effettiva* (4) $\theta(x)$ del sistema di equazioni integrali

$$\int_a^b \theta(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

(1) G. Andreoli, *Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali* [Rendic. R. Acc. Lincei, serie 5ª, vol. 23_1 (1° sem. 1914)].

(2) *Rés. des leçons sur le calcul infin.* (Paris, 1823); [*Ouvrages compl.* d'A. C., serie 2ª, tomo 4° (Paris, Gauthier-Villars, 1899), pag. 140].

(3) Nel senso di Lebesgue, ved. *Leçons sur l'intégration par H Lebesgue*, pag. 98 e seg. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

(4) Cioè tale che il gruppo dei punti in cui $\theta(x) \neq 0$ sia di misura > 0.

è che, per ogni funzione $f(x)$ sommabile in (a, b) insieme col suo quadrato, sia soddisfatta l'equazione di chiusura

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = \sum_i a_i^2 \quad (^1), \tag{2}$$

dove

$$a_i = \int_a^b f(x)\, \varphi_i(x)\, dx \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sia c un numero qualunque compreso fra a e b, e indichiamo con $f(x)$ la funzione che è uguale ad 1 in (a, c) e uguale a *zero* in (c, b).

Per questo funzione la (2) ci dà

$$c - a = \sum_i \left[\int_a^c \varphi_i(x)\, dx \right]^2.$$

Mutando c in x, possiamo allora concludere che, *se* (1) *è chiuso*, *è*, *per ogni* x *in* (a, b),

$$x - a = \sum_i \left[\int_a^x \varphi_i(x)\, dx \right]^2 \tag{3}$$

Questa condizione è anche sufficiente perchè, se (1) non è chiusa, esiste una funzione effettiva $\psi(x)$ sommabile in (a, b) insieme col suo quadrato, normale e ortogonale a tutte le (1), e, per la disuguaglianza di Bessel (²), si ha

$$\sum_i \left[\int_a^x \varphi_i(x)\, dx \right]^2 + \left[\int_a^x \psi(x)\, dx \right]^2 \leq x - a,$$

da cui, per qualche x,

$$\sum_i \left[\int_a^x \varphi_i(x)\, dx \right]^2 < x - a,$$

perchè per qualche x è $\int_a^x \psi(x)\, dx \neq 0$ (³).

2. Consideriamo il sistema di funzioni normali e ortogonali in $(0, 2\pi)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1'}$$

(¹) Ved. ad es.: Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVI (1913), pp. 177 e seg.

(²) Ved. p. es.: Severini, loc. cit.

(³) Vedi G. Vitali: *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; t. XX, 1905), pagg. 136-141.

Per dimostrare che è chiuso, basterà provare che

$$\frac{x^2}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_i\left\{\left(\left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]_0^x\right)^2+\left(\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^x\right)^2\right\}=x\,,$$

cioè che

$$\frac{x^2}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum\frac{2-2\cos nx}{n^2}=x\,,$$

o, poichè

$$\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ (^1)\,,$$

che

$$\sum\frac{2\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{2}-\pi x+\frac{\pi^2}{2} \tag{4}$$

E poichè il 1° membro di (4) è proprio la serie di Fourier della funzione

$$\frac{x^2}{2}-\pi x+\frac{\pi^2}{3}$$

che figura nel 2° membro, *per provare che il sistema* (1') *è chiuso basta provare che la funzione*

$$\frac{x^2}{2}-\pi x+\frac{\pi^2}{3}$$

è la somma della corrispondente serie di Fourier.

Ora la serie che figura nel 1° membro di (4) è uniformemente convergente e quindi convergente verso una funzione continua: e allora, per provare che sussiste la (4), basta provare che non esiste una funzione continua $\theta(x)$ non dappertutto nulla, per cui

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}\theta(x)\,dx=0\,. \\ \int_0^{2\pi}\theta(x)\operatorname{sen} nx\,dx=0 \\ \int_0^{2\pi}\theta(x)\cos nx\,dx=0\end{cases} \tag{5}$$

$(n=1\,,2\,,3\,,\ldots)$

È noto che questo si prova molto facilmente [2]. Per questa via la

[1] Ved. p. es.: *Analisi algebrica* di E. Cesaro (Fratelli Bocca, Torino), p. 143.
[2] Ved. per es.: Fubini, *Lezioni di analisi matematica*, 4ª ed. STEN, pag. 444 e seg.

dimostrazione della chiusura del sistema (1′) resta evidentemente semplificata, poichè in sostanza, invece di dimostrare che il sistema (5) non ha nessuna soluzione $\theta(x)$ sommabile insieme col suo quadrato, ci riduciamo a dover dimostrare che il sistema (5) non ha una soluzione continua non dappertutto nulla.

Tale fatto vale per tutti i sistemi 1) [1], ma qui, per il sistema 1′) discende in modo del tutto ovvio.

Antropologia. — *Delle relazioni fra il peso e la statura nell'uomo adulto.* Nota del prof. FABIO FRASSETTO, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Fra i tanti rapporti che si sono proposti dai varî autori per stabilire le relazioni fra il peso e la statura, quello che ha avuto il maggior successo è il rapporto $\frac{P}{S^2} = C$, trovato dal Quetelet [2]. Esso è stato infatti confermato dal Gould e recentissimamente dal Davenport [3] in un accurato studio critico concernente i varî indici di altezza-peso. Ma dai nostri studî, che qui riassumiamo [4], si deduce che il rapporto $P:S^2$ non offre un valore abbastanza costante da poterlo adottare come indice di normalità del peso rispetto alla statura.

Ci siamo valsi dei dati raccolti nelle tavole XX e XXIV dell'*Antropometria militare* del Livi [5], rappresentandoli graficamente (vedi figura). Come origine delle stature (S) abbiamo scelto la statura di cm. 154, e a partire da questo valore abbiamo contato sull'asse delle ordinate (O S) le successive stature in centimetri, in modo che ad ogni cm. della statura corrispondesse un cm. sullo stesso asse. Come origine dei pesi (P) abbiamo scelto il peso di Kg. 54 (le origini si possono sempre scegliere a piacere e secondo opportunità), e a partire da questo valore abbiamo contato i pesi in chilogrammi, rappresentandoli in centimetri lungo l'asse delle ascisse (O P). I punti d'incontro delle perpendicolari ai due suddetti assi, passanti per le varie stature, ed i relativi pesi, uniti fra loro, determinarono (vedi figura) le due

(1) Vedi Severini, l. c.

(2) Quetelet A., *Fisica sociale ossia svolgimento delle facoltà dell'uomo.* Versione in italiano dalla seconda edizione.

(3) Davenport C. B., *Heigth-Weigth Index of Build*; Amer. Journ. Phys. Anthrop., vol. III, n. 4, an. 1920.

(4) Il lavoro per esteso sarà pubblicato in « La Medicina Italiana ». Anno III, n. 1, Milano, 1922.

(5) Livi R., *Antropometria militare*. Parte II, pp. 121 e 132, Roma, 1905.