ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1921.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Fisica Matematica. — *Calcolo delle discontinuità delle derivate di ordine superiore dello spostamento d'equilibrio elastico.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI (1).

La presente breve Nota si collega con alcune mie precedenti, concernenti, più o meno direttamente, la teoria delle distorsioni elastiche, comparse in questi Rendiconti (2), così da formarne quasi un complemento. I simboli conservano, di regola, il significato, del resto abbastanza chiaro per sè, che hanno in codeste Note. Oggetto della presente è un procedimento diretto, che permette di esprimere le indicate discontinuità, per derivate di qualsivoglia ordine, rispetto alle coordinate del punto considerato, riferite ad una terna qualsivoglia d'assi cartesiani ortogonali, in termini delle derivate, fino allo stesso ordine, delle discontinuità delle componenti dello spostamento del punto, da concepirsi come funzioni di coordinate curvilinee ortogonali, rispetto a queste coordinate.

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1921.

(2) *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni*, vol. XXVI (5), 1° semestre 1917. — *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Ibid. — *Nuove applicazioni di una formula commutativa.* Ibid., 2° semestre. — Mi è grato ricordare che, nel tempo che mi occupavo di questi argomenti, il compianto Socio P. Pizzetti mi indicava un procedimento simile al presente, per dedurre le espressioni delle discontinuità delle derivate seconde della funzione potenziale di superficie, trovate, per altra via, dal Somigliana (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LI, 1916).

Simili espressioni per le discontinuità delle derivate prime, valendosi di « assi canonici », cioè formando l'asse delle z colla normale alla superficie di discontinuità, nel punto considerato, mostra come si trovano, in generale, e dà esplicitamente, pel caso di corpi isotropi, il Socio Somigliana, nella seconda delle sue Note *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, pure inserite in questi Rendiconti [1].

Con queste si formano subito le espressioni analoghe per assi cartesiani qualisivogliano. Distinguiamo perciò coll'apice gli elementi riferiti agli assi canonici, e indichiamo con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,3)$ i coseni di direzione di questi assi, rispetto ai suddetti assi fissi. Le $\frac{\partial\xi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \dots$ si esprimono, nel noto modo, per funzioni omogenee, quadratiche delle $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,3)$, e lineari delle $\frac{\partial\xi'}{\partial x'}, \dots, \frac{\partial\zeta'}{\partial y'}, \dots$: quindi anche le $\mathrm{D}\frac{\partial\xi}{\partial x}, \dots$ $\mathrm{D}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \dots$, per le stesse funzioni omogenee, quadratiche delle $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,3)$, e lineari delle $\mathrm{D}\frac{\partial\xi'}{\partial x'}, \dots \mathrm{D}\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}, \dots$, le quali si prestano alle espressioni del Somigliana.

Poniamo

$$\mathrm{D}\xi' = \xi'_\sigma \quad , \quad \mathrm{D}\eta' = \eta'_\sigma \quad , \quad \mathrm{D}\zeta' = \zeta'_\sigma \, , \tag{1}$$

dove $\xi'_\sigma, \eta'_\sigma, \zeta'_\sigma$ rappresentano funzioni delle coordinate curvilinee u, v del punto considerato, (x, y, z) o $(x', y', z'=0)$, della supposta superficie σ di discontinuità, e

$$\mathrm{D}\frac{\partial\xi}{\partial x} = f_1 \quad , \quad \mathrm{D}\frac{\partial\xi}{\partial y} = f_2 \quad , \quad \mathrm{D}\frac{\partial\xi}{\partial z} = f_3 \, . \tag{2}$$

Per quanto precede, le f_1, f_2, f_3 si potranno intendere funzioni note, omogenee, quadratiche rispetto a $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,3)$, e lineari rispetto alle $\frac{\partial\xi'_\sigma}{\partial s_u}, \frac{\partial\xi'_\sigma}{\partial s_v}, \frac{\partial\eta'_\sigma}{\partial s_u}, \frac{\partial\eta'_\sigma}{\partial s_v}, \frac{\partial\zeta'_\sigma}{\partial s_u}, \frac{\partial\zeta'_\sigma}{\partial s_v}$, dove s_u, s_v indicano le misure dell'arco sulla linea u e sulla linea v, tangenti all'asse delle x' e all'asse delle y' [2].

[1] Vol. XXIII, (5), 1914.

[2] Posto

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2 \, ,$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_u} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial}{\partial s_v} \, , \quad \frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial}{\partial s_u} \, ,$$

e concepito un proseguimento nello spazio delle $\xi'_\sigma, \eta'_\sigma, \zeta'_\sigma$, semplicemente,

$$\frac{\partial}{\partial s_u} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s_v} = \frac{\partial}{\partial y'} \, .$$

Ora, si ha

$$
(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_u} = \alpha_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \beta_1 \dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma_1 \dfrac{\partial}{\partial z}\,, \quad \dfrac{\partial}{\partial s_v} = \alpha_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \gamma_2 \dfrac{\partial}{\partial z} \\ D \dfrac{\partial}{\partial s_u} = \alpha_1 \dfrac{\partial}{\partial x} D + \beta_1 \dfrac{\partial}{\partial y} D + \gamma_1 \dfrac{\partial}{\partial z} D\,, \quad D \dfrac{\partial}{\partial s_v} = \alpha_2 \dfrac{\partial}{\partial x} D + \beta_2 \dfrac{\partial}{\partial y} D + \gamma_2 \dfrac{\partial}{\partial z} D. \end{cases}
$$

Applicando le quali relazioni alle (2), se ne ricavano le tre coppie di equazioni (¹):

$$
(4)\quad \begin{cases} \alpha_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \beta_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + \gamma_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z} = \dfrac{\partial f_1}{\partial s_u}\,, \\ \alpha_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \beta_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + \gamma_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z} = \dfrac{\partial f_1}{\partial s_v}\,, \\ \alpha_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + \beta_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} = \dfrac{\partial f_2}{\partial s_u}\,, \\ \alpha_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + \beta_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} = \dfrac{\partial f_2}{\partial s_v}\,, \\ \alpha_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z} + \beta_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} + \gamma_1 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial f_3}{\partial s_u}\,, \\ \alpha_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z} + \beta_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} + \gamma_2 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial f_3}{\partial s_v}\,. \end{cases}
$$

Si ottengono così, per le sei discontinuità indicate, sei equazioni lineari non omogenee: delle quali però il determinante dei coefficienti si riconosce facilmente essere nullo.

Aggiungiamo alle tre coppie di equazioni, rispettivamente, le seguenti:

$$
(5)\quad \begin{cases} \alpha_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \beta_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + \gamma_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z} = X_1\,, \\ \alpha_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + \beta_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} = X_2\,, \\ \alpha_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial z} + \beta_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} + \gamma_3 D \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = X_3\,, \end{cases}
$$

dove le X_1, X_2, X_3 rappresentano tre nuove incognite, deducendone così tre terne corrispondenti.

(¹) Sulla ripetizione degli operatori $\dfrac{\partial}{\partial s_u}$, $\dfrac{\partial}{\partial s_v}$, in relazione colle derivate di ordine superiore, rispetto a u e a v, vedasi la mia Nota, precedentemente citata, *Nuove applicazioni di una formula commutativa.*

Dalla prima terna, moltiplicando per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e sommando, e dalla seconda, moltiplicando per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e sommando, si ricava, senz'altro,

$$(6)\quad \begin{cases} D\,\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \alpha_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial s_u} + \alpha_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial s_v} + \alpha_3 X_1, \\[2ex] D\,\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} = \gamma_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial s_u} + \gamma_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial s_v} + \gamma_3 X_2 . \end{cases}$$

Ma dalla terza terna, moltiplicando per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e sommando, si ottiene

$$D\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\, \partial z} = \beta_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_u} + \beta_2 \frac{\partial f_3}{\partial s_v} + \beta_3 X_3 .$$

Quindi, la prima delle tre equazioni seguenti, dove i secondi membri hanno il significato che risulta dalle precedenti:

$$(7)\quad \gamma_3 X_2 - \beta_3 X_3 = F_1 \ , \ \alpha_3 X_3 - \gamma_3 X_1 = F_2 \ , \ \beta_3 X_1 - \alpha_3 X_2 = F_3 .$$

Moltiplicando, membro a membro, per $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ e sommando, dai primi membri si ha immediatamente 0. Dai secondi membri, si ha

$$-\alpha_2 \frac{\partial f_1}{\partial s_u} + \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial s_v} - \beta_2 \frac{\partial f_2}{\partial s_u} + \beta_1 \frac{\partial f_2}{\partial s_v} - \gamma_2 \frac{\partial f_3}{\partial s_u} + \gamma_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_v},$$

che, per le (4), si riduce parimente a 0.

Le tre equazioni (7) si riducono a due indipendenti, che permettono di determinare due delle incognite X_1, X_2, X_3, in termini della rimanente.

Trattando ora allo stesso modo le equazioni conformi alle (4), relative a η e a ζ, si arriva al risultato che, per mezzo di formole come le (6), le discontinuità delle tre sestuple di derivate seconde si possono esprimere, oltre che in termini degli indicati elementi, come funzioni di tre parametri, che restano, fino a questo momento, incogniti.

Ma, applicando il D alle equazioni dell'equilibrio elastico (supposte nulle o note le discontinuità delle forze di massa), ed esprimendo poi nel suddetto modo le discontinuità di tutte le derivate seconde delle ξ, η, ζ, si otterranno tre equazioni lineari non omogenee, rispetto a quei parametri incogniti, di cui il determinante dei coefficienti, che involge le costanti di elasticità del corpo considerato, non sarà identicamente nullo, atte a determinarli. In seguito a che, per mezzo delle (6), si otterranno le espressioni cercate.

Infine, ottenute queste espressioni, formandone base per un trattamento analogo al precedente, e valendosi di equazioni dedotte dalle equazioni di equilibrio elastico, coll'ulteriore derivazione, membro a membro, se ne ricavano espressioni, composte cogli indicati elementi, per le discontinuità delle derivate terze, e così, di mano in mano, per le discontinuità delle derivate di ordine comunque elevato.