ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un'equazione funzionale.* Nota III di PIA NALLI, presentata dal Corrisp. G. BAGNERA [1].

1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni *continue* nell'intervallo $(0, a)$, α una costante *positiva minore di* 1, $N(x, s)$ una funzione *continua* nel triangolo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq s \leq x$, $P(x, s)$ una funzione *continua* nel triangolo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq s \leq \alpha x$.

Faremo vedere che *se* $|g(0)| < 1$, *l'equazione*

$$(1) \quad u(x) = g(x)\, u(\alpha x) + \int_0^x N(x, s)\, u(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s)\, u(s)\, ds + f(x)$$

ammette una ed una sola soluzione finita e continua in $(0, a)$.

Si determini un intervallo $(0, b)$ $(b \leq a)$ tale che in esso sia $|g(x)| < \varrho < 1$.

Ponendo

$$f_0(x) = f(x),$$

$$f_n(x) = g(x)\, f_{n-1}(\alpha x) + \int_0^x N(x, s)\, f_{n-1}(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^{\alpha x} P(x, s)\, f_{n-1}(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

faremo vedere che *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente in* $(0, b)$ *e rappresenta quindi in questo intervallo una soluzione della* (1).

Trovata tale soluzione, nel secondo membro della (1) esprimiamo la $u(\alpha x)$ e la $u(s)$ del secondo integrale per mezzo della serie trovata, e facciamo poi variare x tra 0 e $\frac{b}{\alpha}$. Allora, nella nostra equazione la somma del primo, del terzo e del quarto termine del secondo membro diventa una funzione nota e l'equazione si riduce ad una di Volterra di seconda specie che risoluta ci dà la $u(x)$ nell'intervallo $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$, ed essa nell'intervallo $(0, b)$ coincide con quella già trovata, cioè con la somma delle $f_n(x)$.

Procedendo analogamente, dopo avere calcolata la $u(x)$ in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ la si può calcolare in $\left(0, \frac{b}{\alpha^2}\right)$ e così via, si arriva a calcolarla in $(0, a)$. Ci

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

resta da far vedere la convergenza uniforme della serie delle $f_n(x)$ nell'intervallo $(0, b)$.

Siano K, H ed l tre costanti positive tali che sia

$$|N(x, s)| < K \ , \ |P(x, s)| < H \ , \ |f(x)| < l ,$$

e formiamo la seguente equazione ausiliaria:

$$v(x) = \lambda \left[\varrho v(\alpha x) + K \int_0^x v(s)\, ds + H \int_0^{\alpha x} v(s)\, ds \right] + l \tag{2}$$

dove λ è un parametro che faremo variare e ϱ è il numero avanti introdotto.

Per $|\lambda| < \frac{1}{\varrho}$ troviamo coi soliti metodi la seguente soluzione

$$v(x) = l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K + H\alpha)(K + H\alpha^2) \dots (K + H\alpha^n)}{(1 - \lambda\varrho)(1 - \lambda\varrho\alpha) \dots (1 - \lambda\varrho\alpha^n)} \frac{\lambda^n}{n!} x^n$$

dove x può variare tra 0 ed ∞ — e potrebbe anzi prendere qualunque valore reale o complesso —.

Ora il secondo membro si può sviluppare in serie di potenze di λ all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\varrho}$, (entro cui cade il punto $\lambda = 1$), cioè si ha

$$v(x) = l\, [v_0(x) + \lambda v_1(x) + \lambda^2 v_2(x) + \cdots] ; \tag{3}$$

tenendo conto dell'equazione (2) a cui soddisfa $v(x)$ si trova

$$v_0(x) = 1$$

$$v_n(x) = \varrho v_{n-1}(x) + K \int_0^x v_{n-1}(s) ds + H \int_0^{\alpha x} v_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Le $v_n(x)$ sono quindi polinomî in x a coefficienti positivi, e perciò la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ — che è quella che figura al secondo membro della (3) per $\lambda = 1$ — converge uniformemente in qualunque intervallo finito. D'altra parte, si verifica per ricorrenza che è $|f_n(x)| \leq l v_n(x)$ nell'intervallo $(0, b)$, e quindi resta ivi dimostrata la convergenza uniforme della serie delle $f_n(x)$.

Abbiamo così trovata una soluzione della (1) in $(0, a)$: *essa è l'unica soluzione finita.* Infatti, se vi sono due di tali soluzioni la loro differenza sarà una funzione $u(x)$ finita in $(0, a)$ e soddisfacente alla (1) con $f(x) = 0$. Ma allora, ponendo

$$u_0(x) = u(x)$$

$$u_n(x) = g(x)\, u_{n-1}(\alpha x) + \int_0^x N(x, s)\, u_{n-1}(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} P(x, s)\, u_{n-1}(s)\, ds$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

si avrà sempre, in base alla (1) stessa, $u_n(x) = u(x)$. Ma se è $|u(x)| < k$ sarà in $(0, b)$ $|u_n(x)| < kv_n(x)$ cioè $|u(x)| < kv_n(x)$, e siccome $v_n(x)$ tende a zero al tendere di n ad ∞ si conclude che $u(x)$ è nulla in $(0, b)$, e perciò anche in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$, in $\left(0, \frac{b}{\alpha^2}\right)$ e così via, e finalmente in $(0, a)$.

2. Introduciamo ora nella (1) un parametro λ e consideriamo l'equazione

$$u(x) = \lambda \left[g(x)\, u(\alpha x) + \int_0^x \mathrm{N}(x, s)\, u(s)\, ds + \right. \tag{4}$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}(x, s)\, u(s)\, ds \right] + f(x).$$

Toglieremo l'ipotesi che sia $|g(0)| < 1$ ma aggiungeremo l'altra che $f(x)$ e $g(x)$ *ammettano derivate di qualunque ordine rispetto ad* x *e che* $\mathrm{N}(x, s)$ *e* $\mathrm{P}(x, s)$ *ammettano derivate parziali di qualunque ordine rispetto ad* x *e ad* s, *continue nei triangoli dove le funzioni sono definite.*

Studieremo le soluzioni della (4) *che ammettono derivate di qualunque ordine in* $(0, a)$.

Supporremo $g(0) \neq 0$. Diremo in seguito brevemente del caso $g(0) = 0$, che è molto più semplice dell'altro.

Fissiamo un numero positivo $\lambda' < \frac{1}{|g(0)|}$ e si determini $b \leq a$ in modo che in $(0, b)$ sia $|g(x)| < \frac{1}{\lambda'}$, si faccia variare λ nel cerchio $|\lambda| \leq \lambda'$ e si definiscano in $(0, a)$ le $f_n(x)$ come al n. 1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ è l'unica soluzione della (4) in $(0, b)$. Se ora nella (4) si fa variare x in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ ed al posto di $u(\alpha x)$ ed $u(s)$ del secondo integrale si mettono le loro espressioni dedotte dalla serie soprascritta, vediamo che questa serie rappresenta la soluzione della (4) anche in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$, perchè in questo intervallo $\lambda \left[g(x)\, u(\alpha x) + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}(x, s)\, u(s)\, ds \right] + f(x)$ è una funzione nota che si sviluppa in serie di potenze di λ, e perciò la $u(x)$, che in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ si ottiene risolvendo l'equazione di Volterra di seconda specie a cui si riduce la (4), si sviluppa pure in serie di potenze di λ. Questa serie non può essere altro che quella già ottenuta, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$, come si vede subito eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di λ nei due membri della (4).

Dimostrato che la serie in discorso è soluzione della (4) in $\left(0, \frac{b}{\alpha}\right)$ si dimostra che lo è anche in $\left(0, \frac{b}{\alpha^2}\right)$ e così via, e finalmente in $(0, a)$, purchè sia $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$.

Quando si fissa per λ un valore soddisfacente a questa limitazione, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ converge uniformemente rispetto ad x in $(0, a)$. Infatti, ciò che abbiamo detto finora sussiste nella sola ipotesi che le funzioni note della (4) siano continue nei dominî dove sono definite — anche se non sono derivabili — sussiste perciò anche per l'equazione

$$v(x) = \lambda \left[|g(x)|\, v(\alpha x) + \int_0^x |N(x, s)|\, v(s)\, ds + \int_0^{\alpha x} |P(x, s)|\, v(s)\, ds \right] + |f(x)|.$$

Quando $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$ si ha la soluzione $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n(x)$, che è l'analoga della serie che abbiamo formata per la (4); ora le $v_n(x)$ sono tutte positive e siccome quando si fissa λ, $v(x)$ è funzione continua di x, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n(x)$ converge uniformemente in $(0, a)$, lo stesso si potrà dunque dire della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$, perchè $|f_n(x)| \leq v_n(x)$.

3. Passeremo ora a studiare la soluzione della (4) per valori di λ il cui modulo non è minore di $\frac{1}{|g(0)|}$. Si vedrà nella trattazione che faremo che la soluzione $u(x)$ che abbiamo trovata, valida per i valori di λ di modulo minore di $\frac{1}{|g(0)|}$, è derivabile in $(0, a)$.

Ammesso che la (4) ammetta una soluzione $u(x)$ derivabile in $(0, a)$ si avrà per derivazione

$$(5) \qquad \begin{aligned} u'(x) = \lambda \Big[& \alpha g(x)\, u'(\alpha x) + \int_0^x N_1(x, s)\, u'(s)\, ds + \\ & + \int_0^{\alpha x} P_1(x, s)\, u'(s)\, ds + u(0)\, q_1(x) \Big] + f'(x), \end{aligned}$$

dove poniamo

$$N_1(x, s) = N(x, x) + \int_s^x \frac{\partial N(x, t)}{\partial x}\, dt$$

$$P_1(x, s) = g'(x) + \alpha P(x, \alpha x) + \int_s^x \frac{\partial P(x, t)}{\partial x}\, dt,$$

$$q_1(x) = N_1(x, 0) + P_1(x, 0).$$

Il valore $u(0)$ si ricava dalla (4) ed è

$$u(0) = \frac{f(0)}{1 - \lambda g(0)} .$$

Per il risultato ottenuto al n. precedente possiamo dire che la (5) ammette una ed una sola soluzione per ogni valore di $\lambda \neq \frac{1}{g(0)}$ e di modulo minore di $\frac{1}{\alpha |g(0)|}$. La soluzione è la seguente

$$u'(x) = u_{1,1}(x) + \frac{\lambda f(0)}{1 - \lambda g(0)} u_{1,2}(x) ,$$

dove $u_{1,1}(x)$ ed $u_{1,2}(x)$ sono le soluzioni delle due equazioni

$$u_{1,i}(x) = \lambda \left[\alpha g(x) u_{1,i}(\alpha x) + \int_0^x \mathrm{N}_1(x , s) u_{1,i}(s) ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}_1(x , s) u_{1,i}(s) ds \right] + l_{1,i}(x) \qquad (i = 1 , 2)$$

con $l_{1,1}(x) = f'(x)$ e $l_{1,2}(x) = q_1(x)$. Le $u_{1,i}(x)$ si sviluppano in serie di potenze di λ all'interno del cerchio con centro nell'origine e raggio $\frac{1}{\alpha |g(0)|}$, e quando si fissa λ tali serie convergono uniformemente rispetto ad x nell'intervallo $(0 , a)$. Avremo dunque che all'interno del cerchio $|\lambda| \leq \frac{1}{\alpha |g(0)|}$ e per $\lambda \neq \frac{1}{g(0)}$ la (4) ammette l'unica soluzione derivabile

$$(6) \qquad u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x) dx + \frac{f(0)}{1 - \lambda g(0)} \left[1 + \lambda \int_0^x u_{1,2}(x) dx \right]$$

e questa soluzione quando $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$ coincide con quella già trovata, perchè si è visto che se $|\lambda| < \frac{1}{|g(0)|}$ la soluzione della (4) è unica sotto la sola condizione che sia finita. Per $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{g(0)}$ la (4) ammette soluzione finita quando e solo quando è $f(0) = 0$. La necessità di questa condizione discende immediatamente dalla (4) e la sufficienza dalla (6).

Se $f(0) = 0$ e $\lambda = \lambda_0$ una soluzione della (4) sarà

$$u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x)/_0 dx$$

dove con $u_{1,1}(x)/_0$ intendiamo che in $u_{1,1}(x)$, la quale dipende anche da λ, bisogna porre $\lambda = \lambda_0$. La soluzione non è unica, perchè la funzione

$$\varphi_0(x) = 1 + \lambda_0 \int_0^x u_{1,2}(x)/_0 \, dx \tag{7}$$

soddisfa all'equazione omogenea che si ottiene dalla (4) ponendo $\lambda = \lambda_0$ ed $f(x) = 0$. Per $\lambda = \lambda_0$, se $f(0) = 0$, la più generale soluzione della (4) che sia derivabile in $(0, a)$ è

$$u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x)/_0 \, dx + c\varphi_0(x)$$

con c costante arbitraria.

Matematica. — *Sulla equazione integrale di Fredholm a nucleo non limitato.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Corrispondente Guido Fubini [1].

Data l'equazione integrale di Fredholm:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y) dy + f(x), \tag{1}$$

anche se il nucleo K non è limitato, supposto, *in particolare*, che esistano due numeri α e A, il primo *minore dell'unità* ed il secondo positivo, tali che in tutto il quadrato Q limitato dalle rette $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, sia sempre

$$|K(x, y)|\,|x - y|^\alpha \leq A, \tag{2}$$

si sa che alla risoluzione dell'equazione si può sostituire quella della seguente

$$\varphi(x) = \lambda^\nu \int_0^1 K_\nu(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f_\nu(x), \tag{3}$$

ove $K_\nu(x, y)$ è il ν^{mo} nucleo iterato, e si ha $K_0(x, y) = K(x, y)$,

$$K_1(x, y) = \int_0^1 K(x, s) K(s, y) ds, \quad K_2(x, y) = \int_0^1 K(x, s) K_1(s, y), \ldots$$

$$f_\nu(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K_0(x, s) f(s) ds + \cdots + \lambda^{\nu-1} \int_0^1 K_{\nu-1}(x, s) f(s) ds.$$

È noto pure che esiste un numero intiero e positivo n, tale che, per $\nu \geq n$, il nucleo K_ν riesce limitato in Q. Posto $\nu = n$ si può dunque sostituire all'equazione (I) un'equazione di nucleo limitato K_n.

[1] Pres. nella seduta del 6 febbraio 1921.