ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

dove con $u_{1,1}(x)/_0$ intendiamo che in $u_{1,1}(x)$, la quale dipende anche da λ, bisogna porre $\lambda = \lambda_0$. La soluzione non è unica, perchè la funzione

$$\varphi_0(x) = 1 + \lambda_0 \int_0^x u_{1,2}(x)/_0\, dx \tag{7}$$

soddisfa all'equazione omogenea che si ottiene dalla (4) ponendo $\lambda = \lambda_0$ ed $f(x) = 0$. Per $\lambda = \lambda_0$, se $f(0) = 0$, la più generale soluzione della (4) che sia derivabile in $(0, a)$ è

$$u(x) = \int_0^x u_{1,1}(x)/_0\, dx + c\varphi_0(x)$$

con c costante arbitraria.

Matematica. — *Sulla equazione integrale di Fredholm a nucleo non limitato.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Corrispondente Guido Fubini [1].

Data l'equazione integrale di Fredholm:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y) dy + f(x), \tag{1}$$

anche se il nucleo K non è limitato, supposto, *in particolare*, che esistano due numeri α e A, il primo *minore dell'unità* ed il secondo positivo, tali che in tutto il quadrato Q limitato dalle rette $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, sia sempre

$$|K(x, y)|\, |x - y|^\alpha \leq A, \tag{2}$$

si sa che alla risoluzione dell'equazione si può sostituire quella della seguente

$$\varphi(x) = \lambda^\nu \int_0^1 K_\nu(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f_\nu(x), \tag{3}$$

ove $K_\nu(x, y)$ è il ν^{mo} nucleo iterato, e si ha $K_0(x, y) = K(x, y)$,

$$K_1(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, K(s, y) ds\,, \quad K_2(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, K_1(s, y)\,, \ldots$$

$$f_\nu(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K_0(x, s) f(s) ds + \cdots + \lambda^{\nu-1} \int_0^1 K_{\nu-1}(x, s) f(s) ds\,.$$

È noto pure che esiste un numero intiero e positivo n, tale che, per $\nu \geq n$, il nucleo K_ν riesce limitato in Q. Posto $\nu = n$ si può dunque sostituire all'equazione (I) un'equazione di nucleo limitato K_n.

[1] Pres. nella seduta del 6 febbraio 1921.

Nelle applicazioni è utile conoscere, in funzione di α, di A e di n, un numero positivo M che non sia superato, in tutto Q, dal valore assoluto del nucleo limitato K_n. Determinato riescirebbe l'estremo superiore di $|K_n|$, ma ci si può accontentare di avere dei numeri M che, per quanto maggiori di tale estremo, siano di facile calcolo. In questa Nota do appunto, in funzione di α, di A e di n, di questi numeri M.

1. Per la funzione $L(x, y)$, pur essa definitiva nel quadrato Q, sia sempre ivi

$$|L(x, y)|\,|x - y|^{\beta} \leq B,$$

essendo B un numero positivo e β un numero minore dell'unità. Si ponga

$$F(x, y) = \int_0^1 K(x, s)\, L(s, y)\, ds,$$

orbene, è facile dimostrare che:

se $\alpha + \beta < 1$, è ovunque

$$|F(x, y)| < \frac{4AB}{1 - \alpha - \beta},$$

se $\alpha + \beta > 1$, è ovunque

$$|F(x, y)|\,|x - y|^{\alpha+\beta-1} < 4AB\left(\frac{1}{\alpha + \beta - 1} + \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta}\right),$$

se $\alpha + \beta = 1$, è ovunque

$$|F(x, y)|\,|x - y|^{\varepsilon} < 4AB\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1 - \alpha - \varepsilon} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

dove ε è un qualunque numero positivo minore di $1 - \alpha$. Conviene prendere per ε il valore $(1 - \alpha)/2$ che minimizza il quarto fattore del secondo membro dell'ultima diseguaglianza scritta, e si ha allora:

se $\alpha + \beta = 1$, è ovunque

$$|F(x, y)|^{\frac{1-\alpha}{2}} < 4AB\,\frac{3\alpha + 1}{\alpha(1 - \alpha)}.$$

2. La ripetuta applicazione, ai successivi nuclei iterati, delle diseguaglianze trovate, fatta però talvolta con qualche accorgimento per semplificare il risultato finale, dà quanto segue.

Se μ è un qualunque numero positivo, ed è sempre in Q:

$$|K(x, y)| \leq A\,|\log|x - y||^{\mu},$$

si trova

$$n = 1\ ,\quad M = 4A^2\,\frac{(2\mu + 1)^{2\mu+1}}{e^{2\mu}}.$$

Valga ora la (2). Se $\alpha < 1/2$, si trova

$$n = 1 \ , \ \mathrm{M} = \frac{4\mathrm{A}^2}{1 - 2\alpha} \, .$$

Sia ora $\alpha \geq 1/2$. Se, essendo p un numero intiero e positivo è $\alpha = p/(p+1)$, si trova:

$$n = p + 1 \ , \ \mathrm{M} = (n-1)(4n-3)2^{2n+1} n^n \mathrm{A}^{n+1} \, ,$$

in particolare, per $\alpha = 1/2$, si ha:

$$n = 2 \ , \ \mathrm{M} = 640\mathrm{A}^3 \, .$$

Se è invece $(p-1)/p < \alpha < p/(p+1)$, si trova:

$$n = p \ , \ \mathrm{M} = \frac{4^n \mathrm{A}^{n+1}}{(n-1)!\,(1-\alpha)^{n-1}} \frac{\prod_1^{n-1} [(i^2 + i + 1)\alpha - i^2]}{\prod_1^{n-1} [(i+1)\alpha - i]} \frac{1}{n - (n+1)\alpha} \, ,$$

ed ingrandendo

$$\mathrm{M} = \frac{4^n \mathrm{A}^{n+1} [n(n+1)]^{n-2}}{(n-2)! \left(\alpha - \dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{n}{n+1} - \alpha\right)} \, .$$

Matematica. — *Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali.* Nota I di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE [1].

Se un sistema di funzioni ortogonali in un intervallo (a, b) [2] non è chiuso, esiste, come è noto [3], un sistema di funzioni, detto *sistema complementare* del sistema dato, che, aggiunto a questo, dà luogo ad un sistema chiuso di funzioni ortogonali. Di sistemi complementari ne esistono anzi infiniti, ma essi possano facilmente dedursi l'uno dall'altro [4]; in particolare, se uno è finito, gli altri sono anche finiti e composti tutti dello stesso numero di funzioni [5].

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

[2] Intenderemo di riferirci costantemente a funzioni sommabili insieme coi loro quadrati in (a, b).

[3] Cfr. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXI, serie 5ª (1912), pp. 675-685].

[4] Cfr. Lauricella, loc. cit. (3), pag. 677.

[5] Cfr. Severini, *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXIII, serie 5ª (1914), pp. 219-225; 315-321].