ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Valga ora la (2). Se $\alpha < 1/2$, si trova

$$n = 1 \;, \; \mathrm{M} = \frac{4\mathrm{A}^2}{1 - 2\alpha} .$$

Sia ora $\alpha \geq 1/2$. Se, essendo p un numero intiero e positivo è $\alpha = p/(p+1)$, si trova:

$$n = p + 1 \;, \; \mathrm{M} = (n-1)(4n-3)2^{2n+1} n^n \mathrm{A}^{n+1} ,$$

in particolare, per $\alpha = 1/2$, si ha:

$$n = 2 \;, \; \mathrm{M} = 640\mathrm{A}^3 .$$

Se è invece $(p-1)/p < \alpha < p/(p+1)$, si trova:

$$n = p \;, \; \mathrm{M} = \frac{4^n \mathrm{A}^{n+1}}{(n-1)!\,(1-\alpha)^{n-1}} \; \frac{\prod_1^{n-1} [(i^2 + i + 1)\,\alpha - i^2]}{\prod_1^{n-1} [(i+1)\alpha - i]} \; \frac{1}{n - (n+1)\alpha} ,$$

ed ingrandendo

$$\mathrm{M} = \frac{4^n \mathrm{A}^{n+1} \, [n(n+1)]^{n-2}}{(n-2)! \left(\alpha - \dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{n}{n+1} - \alpha\right)} .$$

Matematica. — *Sopra i sistemi complementari dei sistemi non chiusi di funzioni ortogonali.* Nota I di CARLO SEVERINI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE (¹).

Se un sistema di funzioni ortogonali in un intervallo (a, b) (²) non è chiuso, esiste, come è noto (³), un sistema di funzioni, detto *sistema complementare* del sistema dato, che, aggiunto a questo, dà luogo ad un sistema chiuso di funzioni ortogonali. Di sistemi complementari ne esistono anzi infiniti, ma essi possano facilmente dedursi l'uno dall'altro (⁴); in particolare, se uno è finito, gli altri sono anche finiti e composti tutti dello stesso numero di funzioni (⁵).

(¹) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(²) Intenderemo di riferirci costantemente a funzioni sommabili insieme coi loro quadrati in (a, b).

(³) Cfr. Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXI, serie 5ª (1912), pp. 675-685].

(⁴) Cfr. Lauricella, loc. cit. (3), pag. 677.

(⁵) Cfr. Severini, *Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm* [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXIII, serie 5ª (1914), pp. 219-225; 315-321].

In questa Nota mi propongo di esporre alcune ricerche intorno al modo di costruire un sistema complementare.

1. Ricordiamo che dicesi *equazione di chiusura* di un sistema di funzioni ortogonali e normali

$$(1) \qquad V_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

l'equazione

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_0^n {}_k A_k V_k(x) \right]^2 dx = 0 \ , \quad A_k = \int_a^b f(x) V_k(x)\, dx,$$

la quale può anche porsi sotto una delle seguenti forme:

$$(2') \qquad \int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_0^\infty {}_k A_k^2$$

$$(2'') \qquad \int_a^x f(x)\, dx = \sum_0^\infty {}_k A_k \int_a^x V_k(x)\, dx \ \text{(6)} \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Dalla (2″) risulta immediatamente, che se più funzioni soddisfano all'equazione di chiusura del sistema (1), altrettanto può dirsi di ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti.

2. Scelto comunque un sistema di funzioni

$$(3) \qquad \varphi_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, ...),$$

tale che non esistano per le equazioni integrali

$$(4) \qquad \int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

soluzioni *effettive*, ossia diverse da zero in punti di (a, b) costituenti insiemi di misura non nulla (7), e posto

$$(5) \qquad A_k^{(i)} = \int_a^b \varphi_i(x) V_k(x)\, dx \qquad (i, k = 0, 1, 2, ...),$$

si indichi con

$$(6) \qquad \Phi_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)$$

(6) Cfr. Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI (1913), § 2].

(7) Si può in particolare assumere:

$$\varphi_i(x) = x^i \qquad (i = 0, 1, 2, ...].$$

Cfr. Severini, *Sulle equazioni integrali* $\int_a^b \theta(x)\, x^n dx = 0$ $(n = 0, 1, 2, ..)$ [Rend. della R. Acc. dei Lincei (Roma), vol. XXIX, serie 5ª (1920)].

la funzione, alla quale converge in media (8) la successione

$$S_n^{(i)}(x) = \sum_0^n {}_k A_k^{(i)} V_k(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

rappresentata quasi dappertutto in (a, b), eccettuati cioè al più i punti di un insieme di misura nulla, dalla serie

$$U_0^{(i)}(x) + \sum_1^\infty {}_\nu [U_\nu^{(i)}(x) - U_{\nu-1}^{(i)}(x)] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove

$$U_\nu^{(i)}(x) = \sum_0^\infty {}_k A_k^{(i)} \cdot \frac{1}{2h_\nu} \int_{x-h_\nu}^{x+h_\nu} V_k(x)\, dx \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ed h_ν indica il termine generale di una successione di numeri positivi, decrescenti, tendenti a zero (9). Questa funzione ha, rispetto al sistema dato (1), gli stessi coefficienti di Fourier della $\varphi_i(x)$, cioè

$$\text{(7)} \qquad \int_a^b \Phi_i(x)\, V_k(x)\, dx = A_k^{(i)} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se, come noi supponiamo, il sistema (1) non è chiuso, la differenza

$$\text{(8)} \qquad \psi_i(x) = \varphi_i(x) - \Phi_i(x)$$

non può, per ogni i, essere quasi dappertutto uguale a zero in (a, b) (10).

Siano

$$\text{(9)} \qquad \psi_{i_\nu}(x) = \varphi_{i_\nu}(x) - \Phi_{i_\nu}(x) \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ i_\nu < i_{\nu+1} \end{pmatrix}$$

quelle funzioni (8) che non risultano quasi dappertutto nulle, per le quali si ha, a causa della (5) e della (7)

$$\text{(10)} \qquad \int_a^b \psi_{i_\nu}(x)\, V_k(x)\, dx = 0 \qquad (\nu, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

3. Nell'ipotesi che le (9) siano in numero > 1, dimostriamo ora il seguente teorema:

(8) Cfr. Fischer, *Sur la convergence en moyenne* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), T. CXLIV (1907), pp. 1022-1024]. — Riesz, *Ueber orthogonale Funktionen systeme* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-physikalische Klasse (1907), pp. 116-122]. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 225-245]. — Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXX (1910), pp. 289-335].

(9) Cfr. Severini, loc. cit. (5), § 5.

(10) Cfr. Lauricella, loc. cit. (3), § 3. — Severini, loc. cit. (6), § 9.

Affinchè quantesivogliano funzioni (9) *siano quasi dappertutto in* (a, b) *linearmente indipendenti, è necessario e sufficiente che nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli delle corrispondenti funzioni* (3) *soddisfi all'equazione* (2).

Se infatti si ha quasi dappertutto

$$\sum_{1}^{m} {}_{\nu}\, C_{\nu}\, \psi_{i_{\nu}}(x) = 0\,,$$

poichè le (6) soddisfano alla (2), alla stessa equazione deve soddisfare (§ 1) la

$$g(x) = \sum_{1}^{m} {}_{\nu}\, C_{\nu}\, \varphi_{i_{\nu}}(x)\,.$$

Viceversa si abbia

$$\int_a^b [g(x)]^2\, dx = \sum_{0}^{\infty} {}_{k}\, B_k^2 \quad , \quad B_k = \int_a^b g(x)\, V_k(x)\, dx\,.$$

Essendo

$$\int_a^b [G(x)]^2\, dx = \sum_{0}^{\infty} {}_{\mu}\, B_k^2$$

ove si è posto

$$G(x) = \sum_{1}^{m} {}_{\nu}\, C_{\nu}\, \Phi_{i_{\nu}}(x)\,,$$

se ne deduce

$$\int_a^b [g(x) - G(x)]^2\, dx = 0\,,$$

e quindi quasi dappertutto in (a, b)

$$g(x) = G(x)\,.$$

Con ciò il teorema è dimostrato.

Matematica. — *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre.* Nota di Alessandro Terracini, presentata dal Socio C. Segre [1].

Chiamiamo, collo Scorza [2], *varietà di Segre* una varietà V che rappresenti, nel modo considerato per la prima volta dal prof. Segre, le s^{ple} di punti appartenenti rispettivamente a s spazi lineari ($s \geq 1$). Se questi spazi, siano rispettivamente $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(s)}$, hanno ordinatamente dimensione

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(2) *Sulle varietà di Segre*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLV (1909-10); si trovano in questo lavoro anche altre citazioni. Intorno alle stesse varietà cfr. anche Bordiga: *Sul modello minimo delle varietà delle n^{ple} non ordinate dei punti di un piano*, Annali di Matematica, serie III, vol. XXVII (1918).