ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

Affinchè quantesivogliano funzioni (9) *siano quasi dappertutto in* (a, b) *linearmente indipendenti, è necessario e sufficiente che nessuna combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli delle corrispondenti funzioni* (3) *soddisfi all'equazione* (2).

Se infatti si ha quasi dappertutto

$$\sum_{1}^{m}{}_{\nu}\, C_{\nu}\, \psi_{i_\nu}(x) = 0\,,$$

poichè le (6) soddisfano alla (2), alla stessa equazione deve soddisfare (§ 1) la

$$g(x) = \sum_{1}^{m}{}_{\nu}\, C_{\nu}\, \varphi_{i_\nu}(x)\,.$$

Viceversa si abbia

$$\int_a^b [g(x)]^2\, dx = \sum_{0}^{\infty}{}_{k}\, B_k^2 \quad , \quad B_k = \int_a^b g(x)\, V_k(x)\, dx\,.$$

Essendo

$$\int_a^b [G(x)]^2\, dx = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, B_k^2$$

ove si è posto

$$G(x) = \sum_{1}^{m}{}_{\nu}\, C_{\nu}\, \Phi_{i_\nu}(x)\,,$$

se ne deduce

$$\int_a^b [g(x) - G(x)]^2\, dx = 0\,,$$

e quindi quasi dappertutto in (a, b)

$$g(x) = G(x)\,.$$

Con ciò il teorema è dimostrato.

Matematica. — *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre.* Nota di Alessandro Terracini, presentata dal Socio C. Segre (¹).

Chiamiamo, collo Scorza (²), *varietà di Segre* una varietà V che rappresenti, nel modo considerato per la prima volta dal prof. Segre, le s^{ple} di punti appartenenti rispettivamente a s spazi lineari ($s \geq 1$). Se questi spazi, siano rispettivamente $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(s)}$, hanno ordinatamente dimensione

(¹) Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

(²) *Sulle varietà di Segre*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLV (1909-10); si trovano in questo lavoro anche altre citazioni. Intorno alle stesse varietà cfr. anche Bordiga: *Sul modello minimo delle varietà delle* n^{ple} *non ordinate dei punti di un piano*, Annali di Matematica, serie III, vol. XXVII (1918).

$p_1, p_2, \ldots, p_s$ (con $p_i > 0$; $i = 1, 2, \ldots, s$), e in ciascuno di essi si assume un sistema di coordinate proiettive omogenee di punto $\xi_{i0}, \xi_{i1}, \ldots, \xi_{ip_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, s$), la V, che sta in uno spazio S_N di dimensione $N = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \ldots (p_s + 1) - 1$, è definita parametricamente ponendo le singole coordinate proiettive omogenee x_t ($t = 0, 1, \ldots N$) di un punto dello S_N proporzionali ai varî prodotti che si possono formare assumendo come fattori s fra le ξ, coi primi indici tutti diversi fra loro.

Data una tale varietà, ci proponiamo di costruire una base per il modulo delle forme dello S_N che la contengono, vale a dire un sistema di forme $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_g$, tale che ogni forma dello S_N contenente la V si possa esprimere come combinazione lineare delle Φ (i coefficienti essendo forme di grado conveniente nelle coordinate x). Ci porremo anzi da un punto di vista più ampio, considerando una *varietà di Segre generalizzata*, V_d, ottenuta nel modo seguente. Mantenute le notazioni di prima, siano $n_1, n_2, \ldots, n_s$ degli interi positivi ≥ 1; formiamo i varî prodotti di $n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ fra le ξ, in modo che, dei primi indici, n_1 siano uguali a 1, n_2 siano uguali a $2, \ldots, n_s$ siano uguali a s, e definiamo in uno S_N, con

$$(1) \qquad N = \binom{p_1 + n_1}{p_1}\binom{p_2 + n_2}{p_2} \cdots \binom{p_s + n_s}{p_s} - 1,$$

una V_d (con $d = p_1 + p_2 + \cdots + p_s$) ponendo le singole coordinate proiettive omogenee x_t ($t = 0, 1, \ldots, N$), di un punto dello S_N proporzionali a quei prodotti [1].

È chiaro che basta fare ciascuna delle n uguale all'unità per ritrovare le varietà di Segre di cui si è detto in principio. Invece per $s = 1$, $p_1 = p$, $n_1 = n$, si ottiene una V_p rappresentabile su uno spazio S_p in modo che le sezioni iperpiane della V_p sono rappresentate su quello spazio lineare dalla totalità delle forme di ordine n. In quest'ultimo caso particolare, il problema cui abbiamo più sopra accennato è stato risolto recentemente dallo Hurwitz [2] con un procedimento che si può estendere molto facilmente al caso più generale che qui abbiamo in vista [3].

Indichiamo con

$$(2) \qquad [\alpha_{10}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1p_1}; \ldots; \alpha_{s0}, \alpha_{s1} \ldots, \alpha_{sp_s}]$$

(1) Alcune indicazioni su queste varietà si trovano, al n. 44, nell'articolo *Mehrdimensionale Räume* (del prof. Segre) della Enzyklop. der Math. Wiss. (III C7).

Si tenga presente, per il seguito, che *la V_d non ha punti multipli*; giacchè dalle formole di definizione segue subito che essa è trasformata in sè dalle omografie di un gruppo che opera transitivamente sui suoi punti.

(2) *Ueber die algebraische Darstellung der Normgebilde*. Math. Ann., Band. 79 (1919).

(3) Escludiamo dal seguito il caso banale di $s = 1$, $n_1 = 1$.

quella coordinata x dello S_N che, nella definizione parametrica della V_d, si è posta uguale a

$$\xi_{10}^{\alpha_{10}}\,\xi_{11}^{\alpha_{11}}\dots\xi_{1p_1}^{\alpha_{1p_1}}\dots\dots\xi_{s0}^{\alpha_{s0}}\,\xi_{s1}^{\alpha_{s1}}\dots\xi_{sp_s}^{\alpha_{sp_s}}, \tag{3}$$

(essendo

$$\alpha_{10}+\alpha_{11}+\cdots+\alpha_{1p_1}=n_1\,;\ \dots\ ;\ \alpha_{s0}+\alpha_{s1}+\cdots+\alpha_{sp_s}=n_s).$$

Allora, siano u e v due prodotti (3) che divengono identici fra loro, quando si dividono rispettivamente l'uno per una certa ξ, sia ξ', e l'altro per un'altra ξ, sia ξ''; w e z due altri prodotti (3) che si comportano nello stesso modo, ancora rispetto a ξ' e ξ''; e siano infine U, V, W, Z le coordinate (2) corrispondenti ai prodotti u, v, w, z. Ovviamente, la forma quadratica (nelle x)

$$UZ - VW \tag{4}$$

è nulla identicamente sulla V_d. Ebbene, si formino tutte le (4), e di esse si ritenga solo un sistema di forme linearmente indipendenti, siano Φ_1, $\Phi_2, \dots, \Phi_g$, il quale sia una base per il sistema lineare di tutte le forme quadratiche (4) (il valore di g si troverà indicato più avanti): *le Φ costituiscono anche una base per il modulo delle forme contenenti V_d.*

Il concetto della dimostrazione, la quale si può svolgere, come abbiamo detto, parallelamente a quella dello Hurwitz, è il seguente. Sia H un prodotto di m fra le (2), non tutte necessariamente distinte, $(m>1)$, e $\overline{H}$ la espressione (nelle ξ), in cui esso si sviluppa quando a ogni (2) si sostituisca la corrispondente (3): $\overline{H}$ sarà un prodotto di $m\,(n_1+n_2+\cdots+n_s)$ fra le ξ, delle quali mn_1 avranno il primo indice 1, ecc. Anzi, dato comunque un prodotto di tal fatta, esso si può considerare come ottenuto, nel modo indicato da un prodotto H (o anche da varî prodotti H). Allora si stabilisce (v. più avanti) che *due di quei prodotti di grado m, siano H e H', sono certo congrui rispetto al modulo (delle) Φ, qualora sia $\overline{H}=\overline{H}'$ (identicamente rispetto alle ξ).* Perciò, formati tutti i possibili prodotti $\overline{H}$, se si sceglie comunque, per ciascuno di essi, uno dei prodotti H che ad esso corrispondono, secondo quanto sopra si è detto, ottenendo così i prodotti $H_1, H_2, \dots, H_\mu$, ogni forma di grado m nelle (2), sia F, risulta congrua, rispetto al modulo Φ, a una loro combinazione a coefficienti costanti, sia $c_1H_1+c_2H_2+\cdots+c_\mu H_\mu$; perciò, se F si annulla identicamente su V_d, sarà identicamente (rispetto alle ξ) $c_1\overline{H}_1+c_2\overline{H}_2+\cdots+c_\mu\overline{H}_\mu=0$, da cui segue subito che le c sono nulle e perciò $F\equiv 0 \pmod{\Phi}$, c. d. d.

In un solo punto occorre aggiungere qualche cosa alla dimostrazione dello Hurwitz, e precisamente nella dimostrazione del risultato scritto in corsivo (che corrisponde al Teorema II dello Hurwitz). Ad esso si può giungere colle seguenti considerazioni. Sia

$$H = [\alpha_{10}, \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1p_1}; \dots; \alpha_{s0}, \alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sp_s}][\beta_{10} \dots] \dots$$
$$\dots [\lambda_{10}, \dots, \lambda_{1p_1}; \dots; \lambda_{s0}, \dots, \lambda_{sp_s}],$$

e H' costruita in modo analogo sostituendo ad $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ordinatamente $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$, così che sia

$$\alpha_{10} + \beta_{10} + \dots + \lambda_{10} = \alpha'_{10} + \beta'_{10} + \dots + \lambda'_{10}, \text{ ecc.}$$

Si prova anzitutto che il prodotto di grado m nelle (2), sia $H^{(1)}$, ottenuto da H sostituendo a ciascuna delle $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ col primo indice 1 la corrispondente $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ che compare in H', e lasciando tutto il rimanente invariato, è $\equiv H \pmod{\Phi}$ (¹) (a questo scopo basta ripetere la dimostrazione del citato Teorema II dello Hurwitz, con pure varianti formali) (²). Allora, analogamente, $H^{(1)}$ e quindi anche H, sarà congruo, rispetto al modulo Φ, a un altro prodotto di grado m, sia $H^{(2)}$, ottenuto da esso sostituendo a ciascuna delle $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ col primo indice 2 la corrispondente $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ col primo indice 2 che compare in H' e lasciando tutto il resto invariato. Così continuando, si arriverà a un prodotto $H^{(s-1)} \equiv H \pmod{\Phi}$, il quale, in virtù della prima parte della dimostrazione, sarà altresì $\equiv H'$ $(\text{mod } \Phi)$.

Dalle considerazioni svolte emerge anche che la funzione caratteristica di Hilbert del modulo definito dalla varietà di Segre generalizzata V_d, di cui si è detto, è

$$(5) \qquad \mu = \chi(m) = \binom{mn_1 + p_1}{p_1}\binom{mn_2 + p_2}{p_2} \cdots \binom{mn_s + p_s}{p_s},$$

cosicchè, in particolare, per il numero g delle forme quadratiche linearmente indipendenti che costituiscono la base del modulo Φ, si ha

$$(6) \qquad g = \tfrac{1}{2}(N+1)(N+2) - \binom{2n_1 + p_1}{p_1}\binom{2n_2 + p_2}{p_2} \cdots \binom{2n_s + p_s}{p_s}.$$

La (5), che esprime la postulazione della V_d per le forme di ordine m, permette dunque di scrivere (³)

(¹) Naturalmente, un risultato analogo si otterrebbe se si mutassero analogamente le $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ con un altro primo indice.

(²) Si osservi che essa sussiste anche se $n_1 = 1$ (sebbene lo Hurwitz escluda, per ovvie ragioni, questa ipotesi dalle sue considerazioni).

(³) Cfr. Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXVIII, 1909 (ved. il n. 4).

$$(7)\qquad \binom{mn_1+p_1}{p_1}\binom{mn_2+p_2}{p_2}\cdots\binom{mn_s+p_s}{p_s}=$$

$$=\binom{m+d-1}{d-1}+(\pi_0+1)\binom{m+d-1}{d}-\pi_1\binom{m+d-2}{d-1}+$$

$$+\pi_2\binom{m+d-3}{d-2}+\cdots+(-1)^{d-1}\pi_{d-1}\binom{m}{1}.$$

dove $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{d-1}$ sono i generi aritmetici delle sezioni della V_d rispettivamente con spazi di dimensione $N-d, N-d+1, \ldots, N-1$ (dimodochè π_0+1 è l'ordine della V_d [1])). I valori di questi generi si possono ricavare dalla (7). Facendo $m=-1$, si trova

$$\pi_{d-1}=\binom{n_1-1}{p_1}\binom{n_2-1}{p_2}\cdots\binom{n_s-1}{p_s}.$$

Successivamente, facendo $m=-2$, si ha π_{d-2}, e così via fino a π_0. Del resto, il valore di π_0 si può ricavare direttamente paragonando nei due membri delle (7) i coefficienti di m^d, e si ottiene, per l'ordine della V_d,

$$\pi_0+1=n_1^{p_1}n_2^{p_2}\cdots n_s^{p_s}\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_s)!}{p_1!\,p_2!\ldots p_s!}.$$

E i coefficienti di m^{d-1} dànno, per le curve sezioni spaziali,

$$\pi_1=1+\tfrac{1}{2}(d-1)!\,\frac{n_1^{p_1}n_2^{p_2}\cdots n_s^{p_s}}{p_1!\,p_2!\ldots p_s!}\left[d(d-1)-\sum_{i=1}^{s}\frac{p_i(p_i+1)}{n_i}\right].$$

Si osservi ancora che il procedimento ricorrente di cui sopra prova che, se h è il massimo intero non maggiore di uno almeno fra i numeri

$$\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}, \ldots, \frac{p_s}{n_s},$$

sono nulle tutte le π, ordinate per indice decrescente, fino a π_{d-h} incluso, mentre la prima π non nulla è

[1] Non occorre avvertire che si è trascurato, per scrivere la (7), un ultimo termine contenente a fattore il genere della V_d, in quanto questa è razionale.

$$\pi_{d-h-1} = \binom{(h+1)\,n_1 - 1}{p_1}\binom{(h+1)\,n_2 - 1}{p_2}\cdots\binom{(h+1)\,n_s - 1}{p_s}.$$

Per es., per la varietà di Segre da cui abbiamo preso le mosse, supposto $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$, si ha $\pi_{d-1} = \cdots = \pi_{d-p_s} = 0$ (del resto le varietà sezioni della V_d cui corrispondono questi generi sono razionali, poichè i loro punti sono rappresentati da quelle s^{ple} di punti appartenenti agli spazi $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(s)}$, tali che il punto dell'ultimo spazio appartenga a un dato spazio in esso contenuto), e

$$\pi_{d-p_s} - 1 = \binom{p_s}{p_1}\binom{p_s}{p_2}\cdots\binom{p_s}{p_{s-1}}.$$

Geologia. — *La serie paleozoica delle Alpi Carniche*. Nota di MICHELE GORTANI, presentata dal Socio T. TARAMELLI (1).

Dopo mezzo secolo di ricerche, dovute in minor parte a studiosi italiani (Pirona, Taramelli, Marinoni, Tommasi, Parona, Bozzi, Artini, De Angelis, Marinelli, Vigo), in maggior parte a stranieri (Foetterle, Stur, Hauer, Hoefer, Hoernes, Stache, Suess, Tietze, Harada, Toula, Frech, Milch, Geyer, Rosiwal, Schellwien), il Paleozoico delle Alpi Carniche pareva ormai esattamente e sufficientemente noto quando, nel 1902, il sen. prof. Capellini presentò a cotesta R. Accademia la mia prima comunicazione sul Permocarbonifero di Forni Avoltri (2). Insieme all'amico prof. Vinassa de Regny, che due anni dopo si era associato a me per intraprendere *ex novo* lo studio complessivo delle formazioni paleozoiche delle Alpi Carniche, presentai alla XI sessione del Congresso geologico internazionale (3) un quadro generale dei terreni costituenti quella importantissima serie. Il quadro, che si discostava notevolmente dai precedenti, diede luogo a discussioni durante il Congresso medesimo e dopo; discussioni che, mentre non riuscirono a disarmare il più tenace degli avversarî (4), si chiusero con la leale accettazione dei nostri criterî da parte dell'Ufficio geologico austriaco (5).

Durante questo periodo e, dopo la lunga pausa dovuta alla guerra, nelle escursioni compiute anche sul versante settentrionale della catena (a noi,

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(2) Vedi Rend. R. Acc. Lincei, ser. 5a, XI, 2° sem., 1902, pp. 316-318.

(3) Vinassa e Gortani, *Le paléozoïque des Alpes Carniques*. C. R. XI Congr. géol. intern., Stockholm (1910) 1911, pp. 1005-1012.

(4) Vedi Frech in C. R. XI Congr. géol. intern., pag. 1012; e in N. Jb. f. Min. ecc., 1915, II, pp. 255-256.

(5) Alludo in modo speciale a cortesi comunicazioni epistolari del dott. Geyer, attuale Direttore dell'Ufficio, ed al risultato delle escursioni recentemente compiute coi suoi rilevatori dott. Furlani e dott. Spengler.