ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

verge ivi quasi dappertutto, fatta cioè al più eccezione per i punti di un insieme di misura nulla. In tale ricerca torna utile, come mi propongo di far vedere in un'altra Nota, il teorema del § 2. Per mezzo di questo teorema si arriva infatti a dimostrare che *la* (7) *converge uniformemente nell'intervallo* (a, b), se:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \mathrm{B}_k^2\right)\cdot\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \Lambda_k \mathrm{B}_k^2\right)\right]=0;$$

in particolare se risulta, qualunque sia n:

$$\left|\sum_{1}^{n}{}_k \Lambda_k \mathrm{B}_k^2\right| \leqq \mathrm{C} \qquad (\mathrm{C}\ \text{costante}).$$

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota III di Enrico Fermi, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

§ 4. Per mostrare l'applicazione dei risultati precedenti alla teoria della relatività, supporremo che V_n sia la V_4 spazio-tempo e che L sia una linea oraria, in vicinanza della quale ci proponiamo di studiare i fenomeni. Ponendo per brevità in (5) $ds_{\mathrm{M}} = ds$, si trova in questo caso:

$$ds^2 = (1 + \mathrm{C}\times\mathrm{M} - \mathrm{P})^2\, ds_{\mathrm{P}}^2 + d\overline{y}_1^2 + d\overline{y}_2^2 + d\overline{y}_3^2.$$

Per evitare la comparsa di immaginarii e ristabilire l'omogeneità, conviene fare la seguente sostituzione di variabili:

$$s_{\mathrm{P}} = vt\,;\ \overline{y}_1 = ix\,;\ \overline{y}_2 = iy\,;\ \overline{y}_3 = iz\,,$$

essendo v una costante con le dimensioni di una velocità, per modo che t abbia le dimensioni di un tempo. Si ottiene, così,

$$ds^2 = a\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

dove

$$a = v^2(1 + \mathrm{C}\times\mathrm{M} - \mathrm{P})^2. \tag{10}$$

Da ora in avanti, con gli ordinarî simboli del calcolo vettoriale intenderemo riferirci allo spazio x, y, z. Ed è in questo senso che si può intendere il prodotto scalare che figura in (10), purchè per C si intenda il vettore avente per componenti le componenti covarianti della curvatura geodetica della linea $x = y = z = 0$ e con M — P il vettore di componenti x, y, z. Chiameremo x, y, z coordinate di spazio e t tempo. Per uniformità scriveremo talvolta x_0, x_1, x_2, x_3 al posto di t, x, y, z e chiameremo anche g_{ik} i coefficienti della forma quadratica (9).

§ 5. Sia [1] F_{ik} il campo elettromagnetico e $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ il tensore di primo ordine « potenziale » di F_{ik}, in modo che sia $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$. Poniamo $\varphi_0 = \varphi$ e chiamiamo u il vettore di componenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Si avrà intanto:

$$\left.\begin{matrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix}\right\} = \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t}; \left.\begin{matrix} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot} u \ , \ F_{ii} = 0 \ , \ F_{ik} = -F_{ki},$$

parimenti

$$\left.\begin{matrix} F^{01} \\ F^{02} \\ F^{03} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(-\operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial u}{\partial t}\right), \left.\begin{matrix} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{matrix}\right\} = -\operatorname{rot} u \ , \ F^{(ii)} = 0 \ , \ F^{(ik)} = -F^{(ki)}$$

e quindi

$$\frac{1}{4}\sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{a}\left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\},$$

Sia $d\omega$ l'elemento di ipervolume di V_4. Avremo

$$d\omega = \sqrt{-\| g_{ik} \|}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sqrt{a}\, dt\, d\tau$$

dove $d\tau = dx\, dy\, dz$ è l'elemento di volume dello spazio.

Si ha anche:

$$\Sigma\, \varphi_i\, dx_i = \varphi\, dt + u dM \qquad dM = (dx, dy, dz).$$

Prescindendo dall'azione del campo metrico, la cui variazione è nulla perchè lo riguardiamo come dato *a priori* dalla (9), l'azione prenderà la seguente forma:

$$W = \frac{1}{4}\int_\omega \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)}\, d\omega + \int_e de \int \sum_i \varphi_i\, dx_i + \int_m dm \int ds$$

$$\left(\begin{matrix} de = \text{elemento di carica elettrica} \\ dm = \text{elemento di massa} \end{matrix}\right).$$

Introducendo le notazioni indicate, si trova

$$(11) \qquad W = \frac{1}{2}\iint \left\{\operatorname{rot}^2 u - \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}\sqrt{a}\, dt\, d\tau +$$

$$+ \iint \left(\varphi + u \times V_L\right) \varrho\, d\tau\, dt + \iint \sqrt{a - V_M^2}\, k\, d\tau\, dt,$$

dove ϱ, k sono rispettiv. le densità di elettricità e di materia, per modo che $de = \varrho\, d\tau$, $dm = k\, d\tau$, V_L è la velocità delle cariche elettriche, V_M quella delle masse.

Gli integrali del secondo membro possono estendersi ad un campo arbitrario τ tra due tempi qualunque $t_1\, t_2$. Si ha poi il vincolo che sul contorno del campo τ, e per i due tempi $t_1\, t_2$, siano nulle tutte le variazioni.

[1] Per le notazioni e per la deduzione Hamiltoniana delle leggi della fisica, vedi Weyl., op. cit., pp. 186 e 208.

All'infuori di queste condizioni, le variazioni di φ e di u sono completamente arbitrarie. Per contro, alle variazioni di x, y, z, considerate come coordinate di un elemento di carica o di massa, possono essere imposte ulteriori condizioni, traducenti i vincoli del particolare problema che si sta studiando. Scrivendo intanto che è nullo dw per una variazione qualunque $\delta\varphi$ di φ, si trova

$$0 = -\iint \left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \times \delta \operatorname{grad}\varphi \frac{dt\, d\tau}{\sqrt{a}} + \iint \delta\varphi\, \varrho\, dt\, d\tau .$$

trasformando il primo integrale con opportuna applicazione del teorema di Gauss, e tenendo presente che $\delta\varphi$ si annulla sul contorno, troviamo

$$0 = \iint \delta\varphi \left\{ \varrho + \operatorname{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} dt\, d\tau$$

e, siccome $\delta\varphi$ è arbitrario, abbiamo intanto l'equazione

$$\varrho + \operatorname{div}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\right\} = 0 . \tag{12}$$

In modo analogo, facendo variare u, si trova

$$\varrho\, V_L + \operatorname{rot}(\sqrt{a}\operatorname{rot} u) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] = 0 . \tag{13}$$

Queste due ultime equazioni permettono di determinare il campo elettro-magnetico, una volta assegnate le cariche ed il loro movimento.

Un altro gruppo di equazioni si può ottenere facendo variare in W le traiettorie delle cariche e delle masse. Siano δP_M la variazione della traiettoria delle masse, δP_L quella delle cariche. Indichiamo inoltre, essendo u un vettore funzione di punto e V un vettore, con $\frac{\partial u}{\partial P}(V)$ il vettore di componenti $\frac{\partial u_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} V_z$ ed analoghe. Scrivendo che è nulla la variazione di W, si trova allora, coi soliti artifici:

$$\iint \left(\delta P_L \times \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L + \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right) + V_L \times \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right) \varrho\, dt\, d\tau + \tag{14}$$
$$+ \iint \delta P_M \times \left\{\frac{dt}{ds}\frac{\operatorname{grad} a}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds} V_M\right)\right\} k\, dt\, d\tau = 0 .$$

Se i δP ad un tempo non dipendono da i loro valori, per altri tempi dovrà essere nullo in (14) il coefficiente di dt. Si trova così:

$$\int \left\{\delta P_L \times \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial P}(V_L)\right] + V_L \times \frac{\partial u}{\partial P}(\delta P_L)\right\} \varrho\, d\tau + \tag{15}$$
$$+ \int \delta P_M \times \left\{\frac{1}{2}\frac{dt}{ds}\operatorname{grad} a + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds} V_M\right)\right\} k\, d\tau$$

che deve essere verificata per tutti i sistemi di δP soddisfacenti ai vincoli.