# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE
# DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

*le varietà a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo.*

Il teorema si estende facilmente alle varietà con un numero qualunque di dimensioni maggiore di tre [1]. Se si suppone infatti che la $V_n$ ammetta una ennupla ortogonale (che potrà assumersi come ennupla di riferimento) costituita di congruenze normali ed isotrope, per essa saranno soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\gamma_{hij} = 0 \quad , \quad \gamma_{hii} = \gamma_{hjj} \, ,$$

per ogni terna di indici $h, i, j$ distinti.

In tale ipotesi, per gli invarianti $\gamma$ a 4 indici, varranno le relazioni

$$\gamma_{hi,kj} = 0 \quad , \quad \gamma_{hi,hj} = \gamma_{ki,kj} \, ,$$
$$\gamma_{hi,hi} + \gamma_{kj,kj} = \gamma_{hk,hk} + \gamma_{ij,ij} \, ,$$

in cui $h, i, k, j$ sono da intendere variabili da 1 ad $n$, ma tutti distinti. Le relazioni del 1° gruppo coincidono con le (A'); da quelle del 2° (dando a $k$ tutti i valori da 1 ad $n$, diversi da $i$ e $j$, e sommando) si ottengono le (A''); e infine da quelle del 3° gruppo (dando a $j$ tutti i valori da 1 ad $n$, diversi da $i$ e $k$, e sommando, indi a $k$ tutti i valori da 1 ad $n$, eccetto $h$, e sommando) si hanno le (A''').

Risulta pertanto che ogni $V_n$, nella quale esiste una ennupla ortogonale di congruenze normali e isotrope, è in rappresentazione conforme con la varietà euclidea; la proposizione reciproca non ha bisogno di dimostrazione, e però il teorema di Ricci risulta generalizzato, come si voleva.

## Matematica. — *Sulla equazione funzionale $f(x+y)=f(x)\,f(y)$.* Nota I di Silvio Minetti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

I. Introduzione. — È noto [3] che se una $f(x)$, funzione della $x$ nel senso di Dirichlet, soggiace alle seguenti ipotesi:

1) è definita in tutto il campo reale;

2) in un intervallo prefissato, $a \leq x \leq b$, si mantiene reale, ed inferiore in valore assoluto ad un numero positivo M;

3) in tutto il campo reale soddisfa all'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \, , \tag{1}$$

ovvero all'altra

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \, . \tag{1'}$$

[1] Di questa generalizzazione lo Schouten fa cenno nella nota 33 a piè di pag. 88 del citato suo lavoro.

[2] Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

[3] Darboux, Math. Annal., Bd XVII, 1880, pag. 55.

essa risulta necessariamente continua e quindi (Cauchy) coincide rispettivamente con la funzione $e^{kx}$ o $Kx$ (K costante).

È noto altresì come la questione di trovare il minimo di condizioni da imporre alla $f(x)$ perchè risulti necessariamente continua, ha dato origine a varii lavori, e come forse il risultato più importante in merito sia quello ottenuto dal Darboux [1].

In esso però, come in tutti gli altri lavori sull'argomento, si ammette l'ipotesi 1).

Ci proponiamo di mostrare qui che [escluso il caso banale in cui la $f(x)$ sia zero dappertutto, tranne in un punto] alla 1) si può sostituire l'ipotesi più lata che la $f(x)$ sia definita soltanto nell'intervallo $(a, b)$.

Con ciò, notiamo bene, in forza della (1), o rispettivamente, della (1'), essa viene subordinatamente determinata anche nell'intervallo $(2a, 2b)$, che in generale risulterà staccato dal primo [2].

Senza ledere la generalità, potremo supporre $a$ e $b$ ambedue positivi poichè, in caso contrario, si perverrebbe alla conclusione enunciata ancor più direttamente, come sarà facile riconoscere dal seguito della presente Nota.

Qui tratteremo il caso della (1), ma è ovvio far notare che la conclusione accennata vale anche per il caso in cui la $f(x)$ soddisfi, anzichè alla (1), alla (1').

Lo stesso teorema vale per una $f(z)$, funzione della variabile complessa $z$, sempre beninteso nel senso di Dirichlet; esso si riconduce in modo semplicissimo al caso del campo reale che stiamo per trattare, e sarà oggetto di una brevissima comunicazione che avrò l'onore di presentare a codesta Accademia [3].

[1] Loc. cit. Sull'argomento, che si riconnette intimamente al postulato della continuità della risultante di due vettori, ed alla ben ordinabilità del continuo (post. di Zermelo), vedi: Volpi, Giorn. di Batt., v. XXXV, 1897, pag. 104, a cui però sono state sollevate varie obiezioni; Levi Beppo, Rend. R. Acc. Lincei, ser. V, tom. IX, 2° sem. 1900; Hamel, Math. Ann., Bd. LX, 1905, pag. 459; vedi pure uno studio del prof. Roncagli brevemente riassunto nei Rend. del Semin. Matem. della R. Univ. di Roma, 1913-14, in cui afferma illusoria e scorretta la soluzione discontinua proposta dall'Hamel.

Dal punto di vista della comp. dei vettori vedi l'estesa bibl. nella *Meccanica razionale del Marcolongo*. man. Hoepli, II ediz., vol. I, 1917.

[2] Per la validità della conclusione cui si giunge, basta del resto supporre la $f(x)$ definita in un intervallo $(a, b)$, in esso limitata, e godente della proprietà che il prodotto $f(x_1)\,f(x_2)$ o rispettivamente la somma $f(x_1)+f(x_2)$ (se $x_1$ ed $x_2$ sono due punti compresi nell'intervallo di definizione) resti costante quando, pur variando $x_1$ ed $x_2$, non varii però la loro somma $(x_1+x_2)$.

[3] In proposito vedi: Segre, Atti Acc. Scienze Torino, tom. 25 e 26, an. 1890 e 1891; Segre, Math. Ann., Bd 40, an. 1890-91; Segre, Interm. des Mathem., tom. I, pag. 182, an. 1894; Lebesgue, Atti Acc. Scienze Torino, tom. XLII, 1906-07, pag. 532; E. Noether, Math. Ann., Bd LXXII, 1916; Terracini, Math. Ann. Bd. 80, an. 1921.

II. Legittimità dell'ipotesi $f(a) \neq 0$. — Osserviamo innanzi tutto come sia lecito supporre $f(a) \neq 0$.

Invero, se fosse $f(a) = 0$ dall'eguaglianza

$$f(a)\, f(x) = f(a + x)$$

che vale per $a \leq x \leq b$, si trarrebbe che la $f(x)$ sarebbe sempre nulla, intanto, da $2a$ ad $(a + b)$.

In causa poi dell'altra eguaglianza

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

intesa applicata per $2a \leq x \leq (a + b)$, si trarrebbe che la $f(x)$ è conseguentemente nulla pure da $a$ ad $\dfrac{a+b}{2}$, cioè in tutta la prima metà dell'intervallo $(a, b)$.

Se dunque la $f(x)$ è nulla nell'estremo inferiore, $a$, dell'intervallo, è nulla pure necessariamente in tutti i punti della prima metà di esso (estremo superiore compreso).

Ragionando poi sulla seconda metà di $(a, b)$, come abbiam fatto per la prima, e così di seguito, scorgiamo facilmente come l'ipotesi $f(a) = 0$ tragga la conseguenza $f(x) = 0$ per $a \leq x < b$, cadendo nel caso banale.

III. Riduzione a zero dell'estremo inferiore dell'intervallo di definizione. — Si consideri una nuova funzione definita nell'intervallo chiuso $[0, (b - a)]$ (di cui cioè fan parte anche l'estremo inferiore 0 e l'estremo superiore $[b - a]$) dalla posizione

$$\varphi(x) = \frac{f(x + a)}{f(a)}, \tag{2}$$

posizione legittima, in quanto, come abbiam visto, $f(a) \neq 0$.

La $\varphi(x)$ nell'intervallo $[0 . (b - a)]$ soddisferà alle ipotesi cui soggiace la $f(x)$; in particolare soddisferà in quel campo alla (1).

Invero, se $x_1$ ed $x_2$ sono due punti tali che

$$0 \leq x_1 \leq (b - a)\ ,\quad 0 \leq x_2 \leq (b - a)\ ,\quad 0 \leq (x_1 + x_2) \leq (b - a),$$

sarà

$$\varphi(x_1)\, \varphi(x_2) = \frac{f(x_1 + a)}{f(a)} \frac{f(x_2 + a)}{f(a)} = \frac{f(x_1 + x_2 + a + a)}{f(a)\, f(a)} =$$

$$= \frac{f(x_1 + x_2 + a)}{f(a)} = \varphi(x_1 + x_2).$$

Inoltre $\varphi(0) = 1$, e poi dalla relazione $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ risulterà essere $\varphi$ sempre positiva.

Essa inoltre, a meno di essere sempre nulla da 0 a $(b - a)$ (0 escluso), non può mai annullarsi.

Invero, se fosse $\varphi(x')=0$, potendosi scrivere, per ogni $x''>x'$ e compreso fra $0$ e $(b-a)$,

$$\varphi(x'')=\varphi(x')\,\varphi(x''-x')\,,$$

dovrebbe essere $\varphi(x'')=0$, e quindi, se la $\varphi(x)$ s'annulla in un punto, essa si annulla pure per tutti i punti compresi fra quello e l'estremo superiore dell'intervallo.

In forza poi dell'eguaglianza $\varphi(x')=\varphi\left(\frac{x'}{2}\right)^2$, seguirebbe $\varphi\left(\frac{x'}{2}\right)=0$ e quindi la funzione si annullerebbe anche in tutti i punti dell'intervallo $\left(\frac{x'}{2}\,,x'\right)$.

Così ragionando, si arriva a concludere che la $\varphi(x)$, tranne per $x=0$, sarebbe sempre nulla. In conseguenza di ciò, si annullerebbe anche $f(x)$ per $a<x\leq b$, ricadendo nel caso banale.

Nel seguito della presente Nota mostreremo dapprima che la continuità in un punto generico dell'intervallo può ricondursi alla continuità a destra del punto zero.

Successivamente dimostreremo che la nostra $f(x)$ è necessariamente continua alla destra dell'origine, rimanendo così affermato il nostro assunto.

La presente Nota ha avuto occasione di esser redatta da uno studio sul problema generale della propagazione elettrica lungo le linee col metodo simbolico di Heaviside.

## Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota I di ATTILIO VERGERIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il seguente tipo di equazioni integrali non lineari

$$(1)\qquad u(x)=h(x)+\lambda\sum_{r=1}^{p}\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)}\mathrm{K}^{(r)}\,[x\,,y\,;h(y)]\,dy\,,$$

nel caso che sia $p=1$, $\mu_r(x)=0$, $g_r(x)=x$, il nucleo sia regolare e soddisfi a certe condizioni, venne risoluto dal Volterra (1).

(1) *Leçons sur les équations intégrales* ecc., Gauthier Villars, Paris, 1913, pag. 90. L'equazione lineare del Volterra, col limite superiore generalizzato, venne considerata più tardi dall'Andreoli nella sua Memoria *Sulle equazioni integrali*, inserita nel vol. XXXVII dei Rend. del Circ. mat. di Palermo, pp. 76-112. Ivi l'A. dimostra che, se la funzione incognita è assoggettata soltanto ad operazioni di un certo gruppo, l'equazione data può ricondursi, mediante una trasformazione, ad un'equazione di Fredholm di 1ª specie, nella quale la funzione incognita figuri soggetta a sole operazioni elementari. Altri tipi di equazioni non lineari vennero studiati dal Bratu e dal Lévy P. in parecchie Note apparse nei *Comptes Rendus* negli anni 1909-'10-'11.