ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di polinomi di Darboux e di Poincaré*. Nota di N. ABRAMESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota testè apparsa in questi Rendiconti [1] ho indicato alcuni risultati da me conseguiti in uno studio sistematico delle serie di polinomi nel campo complesso. Chiedo il permesso di completare il riassunto delle mie ricerche riferendomi senz'altro alla Nota precedente per il significato dei simboli e per la numerazione dei §§.

VI. Valendomi del valore assintotico di I_n, trovo un altro modo di determinare la regione di convergenza delle *serie di Darboux*, servendomi della relazione di ricorrenza fra tre polinomi consecutivi, osservando che queste serie sono un caso particolare delle *serie di Poincaré* [2], dove esiste una relazione tra k polinomi consecutivi,

$$R_k(x)\,P_{n+k}(x)+R_{k-1}\,P_{n+k-1}(x)+\cdots+R_0(x)\,P_n(x)=0\ ,\ \sum a_n\,P_n(x)\,.$$

Con uno qualunque di questi tre mezzi, ottengo le curve di convergenza per mezzo di una trasformazione conforme [3].

VII. Servendomi dei valori prossimi di $P_n(x)$ e $Q_n(x)$, dimostro che lo sviluppo in serie di polinomi $P_n(x)$ dell'elemento di Cauchy, $\dfrac{1}{x-y}$, è valevole nell'interno dell'ellissi coi fuochi in 0 ed 1 (oppure a e b) che passa per y. Arrivo in questo modo a dimostrare che una funzione $f(x)$, regolata nell'interno di una corona determinata da due ellissi omofocali, coi fuochi in a e b, si sviluppa in serie di polinomi $P_n(x)$ e funzioni $Q_n(x)$,

$$f(x)=\sum A_n\,P_n(x)+\sum B_n\,Q_n(x)\,,$$

$$A_n=-\frac{1}{2\pi i\,I_n}\int_E f(y)\,Q_n(y)\,dy\ ,\quad B_n=-\frac{1}{2\pi i\,I_n}\int_E f(y)\,P_n(y)\,dy\,.$$

(1) Fasc. 3°, 1° sem. 1922, pag. 89.

(2) Vedi la Memoria dell'American Journal (vol. VII) già citata nella Nota precedente.

(3) Bisogna osservare che il metodo del sig. Faber, di studiare la regione di convergenza delle serie di polinomi per mezzo di una trasformazione conforme, è stata proposta, 45 anni or sono, da Darboux, coll'occasione dello studio del caso particolare nel quale il polinomio $P_n(x)$ è quello che risulta dalla serie ipergeometrica.

VIII. 1°. Studio infine il *caso generale delle serie di Darboux*, $\sum a_n P_{pn}(x)$, il polinomio [1] $P_{pn}(x)$ essendo da $p.n$ equazioni lineari

$$\int_{a_{q-1}}^{a_q} \varphi(x)\, x^s\, P_{pn}(x)\, dx = 0 \;,\; q = 0\,,1\,,\dots p\;;\quad s = 0\,,1\,,\dots n-1\,,$$

p ed $a_0 < a_1 < \cdots < a_p$ essendo numeri dati, e $\varphi(x)$ una funzione positiva e integrabile negli intervalli $(a_0\,, a_1)\,,\dots\,(a_{p-1}\,, a_p)$.

2°. I risultati che trovo sono strettamente connessi con l'espressione che ho ottenuto per il polinomio $P_{pn}(x)$,

$$P_{pn}(x) = \frac{1}{n!\,\varphi(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x-a_0)^n\,(x-a_1)^n \dots (x-a_p)^n\,\psi_n(x)\Big]\,.$$

3°. Considerando, come nel caso $p=1$, le serie di polinomi $P_{pn}(x)$ ai quali corrisponde la funzione $\psi_n(x)$ indipendente da n, risulta che $\varphi(x)$ è soluzione comune ad un'infinità di equazioni integrali. In questo caso, come nel caso quando $\varphi(x) = \psi_n(x)$, dimostro che il polinomio $P_{pn}(x)$ è il coefficiente del termine generale di una serie di Lagrange.

4°. Che questo polinomio verifica un'equazione differenziale lineare, di ordine $(p+1)$, completamente integrabile.

5°. Trovo il valore prossimo del polinomio $P_{pn}(x)$; infine trovo il domenio di convergenza delle serie generalizzate di Darboux, $\sum a_n P_{pn}(x)$.

6°. Nel caso $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ritrovo i polinomi del sig. Appell [2]

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\Big[x^n\,(1-x^2)^n\Big]\,.$$

ai quali trovo una funzione generatrice, un valore prossimo e il dominio di convergenza delle serie $\sum a_n P_{2n}(x)$.

[1] Vedi certe proprietà di questi polinomi nella Nota del sig Angelescu. *Sur une classe de polynômes à une variable* (Comptes Rendus, t. 162, Janv. 1916).

[2] Appell, *Sur une suite de polynômes ayant toutes leurs racines réelles* [Archiv der Mathematik und Physik, 1 (1901), pag. 71].