ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Invero, se fosse $\varphi(x') = 0$, potendosi scrivere, per ogni $x'' > x'$ e compreso fra 0 e $(b - a)$,

$$\varphi(x'') = \varphi(x')\,\varphi(x'' - x'),$$

dovrebbe essere $\varphi(x'') = 0$, e quindi, se la $\varphi(x)$ s'annulla in un punto, essa si annulla pure per tutti i punti compresi fra quello e l'estremo superiore dell'intervallo.

In forza poi dell'eguaglianza $\varphi(x') = \varphi\left(\frac{x'}{2}\right)^2$, seguirebbe $\varphi\left(\frac{x'}{2}\right) = 0$ e quindi la funzione si annullerebbe anche in tutti i punti dell'intervallo $\left(\frac{x'}{2}, x'\right)$.

Così ragionando, si arriva a concludere che la $\varphi(x)$, tranne per $x = 0$, sarebbe sempre nulla. In conseguenza di ciò, si annullerebbe anche $f(x)$ per $a < x - b$, ricadendo nel caso banale.

Nel seguito della presente Nota mostreremo dapprima che la continuità in un punto generico dell'intervallo può ricondursi alla continuità a destra del punto zero.

Successivamente dimostreremo che la nostra $f(x)$ è necessariamente continua alla destra dell'origine, rimanendo così affermato il nostro assunto.

La presente Nota ha avuto occasione di esser redatta da uno studio sul problema generale della propagazione elettrica lungo le linee col metodo simbolico di Heaviside.

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota I di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Il seguente tipo di equazioni integrali non lineari

$$(1) \qquad u(x) = h(x) + \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}\,[x\,,y\,;h(y)]\,dy\,,$$

nel caso che sia $p = 1$, $\mu_r(x) = 0$, $g_r(x) = x$, il nucleo sia regolare e soddisfi a certe condizioni, venne risoluto dal Volterra [1].

[1] *Leçons sur les équations intégrales* ecc., Gauthier Villars, Paris, 1913, pag. 90. L'equazione lineare del Volterra, col limite superiore generalizzato, venne considerata più tardi dall'Andreoli nella sua Memoria *Sulle equazioni integrali*, inserita nel vol. XXXVII dei Rend. del Circ. mat. di Palermo, pp. 76-112. Ivi l'A. dimostra che, se la funzione incognita è assoggettata soltanto ad operazioni di un certo gruppo, l'equazione data può ricondursi, mediante una trasformazione, ad un'equazione di Fredholm di 1ª specie, nella quale la funzione incognita figuri soggetta a sole operazioni elementari. Altri tipi di equazioni non lineari vennero studiati dal Bratu e dal Lévy P. in parecchie Note apparse nei *Comptes Rendus* negli anni 1909-'10-'11.

Qui noi ci proponiamo di studiare la (1) che appartiene ad un tipo alquanto più generale di quello ora menzionato, supponendo che parte delle $K^{(r)}[x, y; h(y)]$, od anche tutte, possano diventare infinite per valori di y nei rispettivi intervalli d'integrazione $[\mu_r(x), g_r(x)]$, con $a \leqq x \leqq b$, senza che perciò ne resti infirmata la loro integrabilità.

2. Per risolvere la (1), opereremo anzitutto una trasformazione ([1]) aggiungendo ai due membri della stessa la funzione

$$u'(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{ c_r u(y) + c \} \, dy ,$$

dove le c_r e la c sono delle costanti da determinarsi. Posto
$U(x) = u(x) + u'(x)$; $K^{(r)}[x, y; h(y)] + c_r u(y) + c = H^{(r)}[x, y; h(y)]$,
la (1) diventa

$$U(x) = h(x) + \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} H^{(r)}[x, y; h(y)] \, dy .$$

Faremo l'ipotesi che la $u(x)$ sia limitata e che le $K^{(r)}[x, y; h(y)]$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$ ammettano, pei valori di y pei quali sono regolari, la derivata prima determinata, rispetto alla funzione $h(y)$ considerata come una variabile; derivata che indicheremo con $K'^{(r)}_{h(y)}[x, y; h(y)]$ ([2]).

Scelti allora un $\sigma > 0$ arbitrario ed un numero positivo m tale che $|\lambda| mp = \varrho$ risulti positivo e minore di un numero arbitrario $\mathrm{k} < 1$, determiniamo le costanti c_r in modo che, per ogni funzione $0 \leqq |\alpha(x)| < 2\sigma$ e per ogni numero $0 < \theta \leqq 1$, si abbia

$$(2) \qquad \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} |H'^{(r)}_{U(y)}[x, y; \theta U(y) + \alpha(y)]| \, dy < m , \qquad (r = 1, 2, \ldots, p) .$$

Indicando poi con ν il massimo modulo della $U(x)$, che naturalmente risulterà funzione della rimanente costante c, determiniamo quest'ultima in modo che, assieme colle (2), rimanga soddisfatta anche la relazione

$$(3) \qquad \frac{\sigma}{\nu + \sigma} > \mathrm{k} .$$

Supposto che il sistema delle precedenti $p + 1$ in equazioni nelle $p + 1$ incognite c_r e c sia compatibile, ammetteremo d'aver fatto nella (1) la tra-

([1]) Con metodo simile a quello qui usato, ho risoluto altri tipi di equazioni non lineari che ho considerato in due mie recenti Memorie, delle quali la prima *Sulle equazioni integrali non lineari*, apparirà nel fascicolo 1-2 del vol. XXXI degli Annali di matematica, e la seconda, dal titolo *Sulle equazioni integrali non lineari con operazioni funzionali singolari*, trovasi in corso di stampa nel Giornale di matematiche.

([2]) A questa condizione si potrebbe sostituire la seguente: che le $K^{(r)}[x, y; U(y)]$, per ogni funzione $\omega(y)$, siano tali da aversi

$$|K^{(r)}[x, y; U(y) + \omega(y)] - K^{(r)}[x, y; U(y)]| \leqq |\omega(y)| \, |F^{(r)}(x, y)| ,$$

sotto la condizione che le funzioni $|F^{(r)}(x, y)|$ siano integrabili.

sformazione di cui sopra. Ciò non di meno noi, per semplicità, continueremo ad usare ancora gli stessi simboli.

3. Supposto pel momento che sia

$$|\, h(x) - u(x) \,| < \sigma \,, \tag{4}$$

poniamo

$$h(x) - \omega_1(x) = u_1(x) = u(x) \,.$$

Per la (4) avremo subito $|\, \omega_1(x) \,| < \sigma$. Similmente, posto

$$h(x) - \omega_2(x) = u_2(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y) - \omega_1(y)]\, dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; u_1(y)]\, dy \,.$$

Sostituendo alla $u(x)$ il suo valore dato dalla (1), s'ottiene

$$\omega_2(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{ \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y) - \omega_1(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y)] \}\, dy =$$

$$= -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \omega_1(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{h(y)}[x\,, y\,; h(y) - \theta^{(r)}\, \omega_1(y)]\, dy \,; \text{ [1]}$$

con $0 < \theta^{(r)} < 1$. E poichè

$$h(y) - \theta^{(r)}\, \omega_1(y) = u(y) + (1 - \theta^{(r)})\, \omega_1(y) = u(y) + \theta_1^{(r)}\, \omega_1(y) \,,$$

sarà

$$|\, \omega^2(x) \,| < |\, \lambda \,|\, \sigma \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} |\, \mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y\,; u(y) + \theta_1^{(r)}\, \omega_1(y)] \,|\, dy$$

e quindi, per la (2)

$$|\, \omega_2(x) \,| < |\, \lambda \,|\, pm\sigma = \varrho\sigma \,.$$

Per esigenze di spazio rimandiamo il sèguito ad altra Nota.

[1] Invero, se α è un valore di y per cui la funzione integranda diviene infinita, si può scrivere:

$$\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \{ \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y) - \omega_1(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y)] \}\, dy = \lim_{\varepsilon, \eta = 0} \left\{ \int_{\mu_r(x)}^{\alpha - \varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha + \eta}^{g_r(x)} \right\} \{ \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y) - \omega_1(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y)] \}\, dy = \lim_{\varepsilon, \eta = 0} \left\{ \int_{\mu_r(x)}^{\alpha - \varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha + \eta}^{g_r(x)} \right\} \omega_1(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{h(y)}[x\,, y\,; h(y) - \theta^{(r)}\, \omega_1(y)]\, dy =$$

$$= \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \omega_1(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{h(y)}[x\,, y\,; h(y) - \theta^{(r)}\, \omega_1(y)]\, dy \,.$$

Colla scrittura $\mathrm{K}'^{(r)}_{h(y)}[x\,, y\,; h(y) - \theta^{(r)}\, \omega_1(y)]$ ed analoghe, bisogna poi intendere che prima si deve derivare la $\mathrm{K}^{(r)}[x\,, y\,; h(y)]$ rispetto alla $h(y)$ e poi mutare $h(y)$ in $[h(y) - \theta^{(r)}\, \omega_1(y)]$.