ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Meccanica celeste. — *Sopra l'integrabilità del problema dei due corpi di masse variabili.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI.

1. Il problema dei due corpi di masse variabili si sa fino ad ora integrare solo in un numero limitatissimo di casi. E precisamente, indicando con $M(t)$ la somma delle masse dei due corpi A e B, abbiamo:

α) Per l'attrazione Newtoniana i due casi in cui si abbia $M(t) = \frac{1}{a+bt}$ oppure $M(t) = \frac{1}{\sqrt{a+bt}}$ con a e b costanti. Sono dovuti entrambi al Mestschersky (¹).

β) Per l'attrazione inversamente proporzionale alla quinta potenza delle distanze, il caso in cui si abbia $M(t) = a + bt$. Esso è dovuto (²) alla dott.ssa C. Maderni, già mia allieva nell'Università di Padova.

γ) Infine, supponendo $M(t) = (a+bt)^n$ e l'attrazione direttamente proporzionale alla potenza k delle distanze — caso che indicherò col simbolo $[k, n]$ — il problema è integrabile per $k + 2n + 3 = 0$. Questo caso è stato trattato dal Lovett in una nota inserita nel presente fascicolo e della quale ho avuto preventiva notizia dalla cortesia del Socio prof. Levi-Civita.

2. Ho colto quindi l'occasione per esporre all'Accademia un teorema da me trovato l'anno scorso, dal quale derivano come conseguenze i tre casi particolari α) β) γ) — cioè tutti quelli fino ad ora conosciuti — e dal quale risulta inoltre che il problema è integrale anche per

$$k + n + 3 = 0. \tag{1}$$

A tale scopo, ricordando che il moto relativo di A intorno a B è piano ed ha luogo con la legge delle aree, sceglieremo le unità fondamentali in modo che il coefficiente attrattivo f, la costante delle aree c ed il coefficiente C si riducano uguali all'unità ed adotteremo l'origine dei tempi in modo da avere $a = 0$. Con tali convenzioni, le equazioni del moto relativo di A intorno a B si scriveranno in coordinate polari

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} - r^k t^n \tag{2}$$

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1 \tag{3}$$

(¹) Cfr. *Astr. Nachr*, n. 3153.
(²) Cfr. questi Rendiconti, 1921, semestre 2°, fasc. 5°.

ed è evidente che integrata la (2), la (3) si riduce immediatamente alle quadrature. Osserveremo poi che la (2) ammette un moltiplicatore Jacobiano uguale all'unità; basterebbe quindi conoscere un integrale primo $F\left(r, t, \frac{dr}{dt}\right) = \text{cost.}$ od un secondo moltiplicatore per avere la soluzione generale del problema.

3. Ciò posto dimostreremo il seguente

Teorema. — *Il caso $[k, n]$ è coniugato al caso $[k, -(k+n+3)]$ nel senso cioè che integrato uno qualsiasi di essi risulta immediatamente integrato anche l'altro.*

Dimostrazione. — Posto $t = \frac{1}{\tau}$ abbiamo

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\tau^2}\tau^4 + 2\tau^3\frac{dr}{d\tau} \tag{4}$$

e quindi la (2) diviene

$$\tau\frac{d^2r}{d\tau^2} + 2\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{r^3\tau^3} - r^k\tau^{-(n+3)}. \tag{5}$$

Ma il primo membro della (5) è identicamente uguale a $\frac{d^2(r\tau)}{d\tau^2}$; ponendo dunque $r\tau = R$ avremo:

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{1}{R^3} - R^k\tau^{-(k+n+3)}. \tag{6}$$

Se invece si operasse sulla (2) con la sostituzione $\tau_1 = \frac{1}{\alpha^2 t}$ ed $R_1 = \alpha r\tau_1$ essendo α una costante arbitraria, essa diverrebbe

$$\frac{d^2R_1}{d\tau_1^2} = \frac{1}{R_1^3} - \frac{R_1^k\,\tau_1{}^{-(k+n+3)}}{\alpha^{k+2n+3}}. \tag{6bis}$$

Ora è evidente che se immaginiamo integrata la (2) e trovato $r = f(t)$, risulterà dai calcoli fatti

$$R = \tau f\left(\frac{1}{\tau}\right) \tag{7}$$

e quindi anche la (6) si potrà considerare come è integrata. Viceversa risoluta la (6) e trovato $R = \varphi(\tau)$, il passaggio inverso ci darà r in funzione di t. Ma interpretando R come raggio vettore e τ come un tempo, la (6) è l'equazione del problema nel caso $[k, -(k+n+3)]$, dunque ecc.

4. *Corollari. I caso d'integrabilità.* — La (6) si riduce evidentemente alle quadrature, quando in essa non comparisce esplicitamente τ; ne concludiamo dunque che il problema è risolubile per

$$k + n + 3 = 0. \tag{8}$$

Eseguendo i calcoli troviamo

(9) $r = \mathrm{R}t$ (10) $\frac{1}{t} = \sqrt{1+k}\int \frac{\mathrm{R}d\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{C}_1\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}^{k+3} - (k+1)}} + \mathrm{C}_2$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie. Eliminando R tra la (9) e la (10) si ha la soluzione cercata $r = f(t)$.

Questo semplice risultato, non ancora messo in luce da altri, racchiude come caso particolare il 1° teorema del Mestschersky (legge Newtoniana ed $\mathrm{M}(t) = \frac{1}{a+bt}\Big)$ che ha luogo per $k = -2$ ed $n = -1$.

5. *Casi coniugati coincidenti. II caso d'integrabilità.* — Come mostra il teorema ora dato, i casi $[k, n]$ sono coniugati due a due dal punto di vista della loro integrabilità; ed è facile anzi di vedere che questo legame è *involutorio*. Infatti partendo, per esempio, dal caso finale C_2 cioè $[k, -(k+n+3)]$ ed operando come si è fatto si ritrova come coniugato il caso iniziale C_1 cioè $[k, n]$.

In generale i due coniugati C_1 e C_2 sono distinti tra loro tranne se si abbia $n = -(k+n+3)$, cioè

$$k + 2n + 3 = 0. \tag{11}$$

Anche in questo caso il problema è integrabile e noi possiamo vederlo nel modo più semplice osservando che nella ipotesi (11) l'equazione (2) diviene omogenea se si suppone che r sia di grado $\frac{1}{2}$ rispetto a t. È questo, in sostanza, il metodo seguito dal Lovett il quale nella sua Nota, indipendentemente dalla teoria ora svolta, pone $t = e^{2\lambda}$ ed $r = e^{\lambda} z$ e mostra che la (2) si riconduce alle quadrature se la (11) è verificata.

Dal nostro punto di vista si può però anche osservare che nella ipotesi (11) la (2) coincide con la (6^{bis}), cioè resta invariata per una sostituzione della forma $\tau_1 = \frac{1}{\alpha^2 t}$ ed $\mathrm{R}_1 = \alpha r \tau_1$ qualunque sia la costante α. Ciò appunto rende ragione della facile integrabilità della (2) nel caso (11) e dà un notevole significato analitico al teorema del Lovett.

Potremo anzi valerci di tale osservazione per trovare una elegante proprietà dell'integrale.

Supponiamo a tale scopo che $r = \psi(t)$ sia una soluzione della (2); i passaggi fatti ci mostrano allora che $\mathrm{R}_1 = \alpha \tau_1 \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 \tau_1}\right)$ sarà soluzione della

(6^{bis}). Ma nel caso (11) la (6^{bis}) coincide con la (2); dunque $r = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ sarà soluzione della (2).

Cioè nell'ipotesi (11) *se* $r = \psi(t)$ *è un integrale, anche* $r = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ *sarà un integrale qualunque sia la costante arbitraria* α.

Sarebbe poi facile di vedere che nel caso (11) si ha sempre come integrale particolare

$$r = s\sqrt{t} \tag{12}$$

essendo s radice dell'equazione

$$4\,s^{k+3} - s^2 - 4 = 0\,. \tag{13}$$

Per $r = s\sqrt{t}$ si ha identicamente $\psi(t) = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ qualunque sia α.

Sarà inutile aggiungere che nell'ipotesi (11) rientrano in particolare il 2° teorema del Mestschersky $\left(\text{per } k = -2 \text{ ed } n = -\frac{1}{2}\right)$ e quello della Maderni (per $k = -5$ ed $n = 1$).

6. Terminando potremo riassumere i risultati della presente Nota affermando che il problema è finora *integrabile soltanto nei casi il cui coniugato è a masse costanti* ($k + n + 3 = 0$) *oppure nei casi che coincidono col proprio coniugato* ($k + 2n + 3 = 0$).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane e delle orbite einsteiniane.* Nota III di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota cerco di rendermi conto delle orbite einsteiniane e dello spazio-tempo che ad esse si riferisce, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali.

1. Ricordiamo [1] che la metrica dello spazio-tempo delle orbite kepleriane è assegnata da

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dr^2 + r^2\, d\varphi^2 - c^2\, dt^2)\,. \tag{1}$$

Alla determinazione di (1) si perviene ammettendo, in primo luogo, che l'orbita descritta da un punto materiale intorno al Sole sia rappresentata dall'equazione, espressione formale della prima legge di Kepler,

[1] Cfr. questi Rendiconti, 1° sem. 1922, fasc. 1°, pag. 18 e fasc. 3°, pag. 92.