ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

(6^{bis}). Ma nel caso (11) la (6^{bis}) coincide con la (2); dunque $r = \alpha t\psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ sarà soluzione della (2).

Cioè nell'ipotesi (11) *se* $r = \psi(t)$ *è un integrale, anche* $r = \alpha t\psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ *sarà un integrale qualunque sia la costante arbitraria* α.

Sarebbe poi facile di vedere che nel caso (11) si ha sempre come integrale particolare

$$r = s\sqrt{t} \tag{12}$$

essendo s radice dell'equazione

$$4s^{k+3} - s^2 - 4 = 0\,. \tag{13}$$

Per $r = s\sqrt{t}$ si ha identicamente $\psi(t) = \alpha t\psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ qualunque sia α.

Sarà inutile aggiungere che nell'ipotesi (11) rientrano in particolare il 2° teorema del Mestschersky $\left(\text{per } k = -2 \text{ ed } n = -\frac{1}{2}\right)$ e quello della Maderni (per $k = -5$ ed $n = 1$).

6. Terminando potremo riassumere i risultati della presente Nota affermando che il problema è finora *integrabile soltanto nei casi il cui coniugato è a masse costanti* ($k + n + 3 = 0$) *oppure nei casi che coincidono col proprio coniugato* ($k + 2n + 3 = 0$).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane e delle orbite einsteiniane.* Nota III di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota cerco di rendermi conto delle orbite einsteiniane e dello spazio-tempo che ad esse si riferisce, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali.

1. Ricordiamo [1] che la metrica dello spazio-tempo delle orbite kepleriane è assegnata da

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dr^2 + r^2\,d\varphi^2 - c^2\,dt^2)\,. \tag{1}$$

Alla determinazione di (1) si perviene ammettendo, in primo luogo, che l'orbita descritta da un punto materiale intorno al Sole sia rappresentata dall'equazione, espressione formale della prima legge di Kepler,

[1] Cfr. questi Rendiconti, 1° sem. 1922, fasc. 1°, pag. 18 e fasc. 3°, pag. 92.

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \text{cost.} = \mathrm{A} \ , \ u = \frac{1}{r} \tag{2}$$

e, in secondo luogo, ammettendo che valga l'espressione formale della seconda legge di Kepler

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost.} = \mathrm{C}. \tag{3}$$

Si è anche detto che lo spazio-tempo (1) non conduce ad alcuna deflessione di un raggio luminoso nel campo gravitazionale solare, deflessione che, come è noto, dovrebbe aver luogo anche in base al semplice postulato di proporzionalità tra massa ed energia, pur giustificato da considerazioni tratte da Einstein dalla teoria della relatività della prima maniera o in senso stretto. Una deflessione dei raggi luminosi nel campo gravitazionale solare dovrebbe potersi dedurre dallo spazio-tempo generato dal Sole quando si identificassero, come riesce spontaneo ad ammettere, le geodetiche di lunghezza nulla ($ds = 0$) con le traiettorie dei raggi luminosi stessi.

Lo spazio-tempo (1) non riesce perciò soddisfacente, ma il difetto che comporta può dipendere dal fatto che esso presume, nel sistema di coordinate r , φ , t, adottato per la descrizione dell'intero sistema solare, la validità rigorosa delle prime due leggi di Kepler le quali, nel sistema indicato di coordinate, potrebbero avere un valore di semplice approssimazione. Sembra più corretto, allo scopo di ulteriori considerazioni, cercare di dedurre l'equazione dell'orbita, descritta da un punto materiale, dall'espressione generale del ds^2 che è atto a rappresentare la metrica dello spazio tempo generato dal Sole.

2. Si è accennato che ragioni di simmetria portano a scrivere che la metrica dello spazio-tempo tridimensionale, che occorre considerare, debba essere assegnata da una espressione della forma

$$ds^2 = - e^{\lambda} \, dr^2 - e^{\mu} \, r^2 \, d\varphi^2 + c^2 \, e^{\nu} \, dt^2 , \tag{4}$$

in cui λ , μ , ν sono tre funzioni della sola r soddisfacenti alla condizione $\lim\limits_{r \to \infty} \lambda = \lim \mu = \lim \nu = 0$.

Si è anche detto che da (4) si deduce

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = he^{-\mu} \ , \ \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2} \, e^{-\nu} \ , \ r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k} \, e^{\nu-\mu} , \tag{5}$$

essendo h , k due costanti di integrazione, e l'equazione dell'orbita, descritta da un punto materiale intorno al Sole,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + e^{\mu-\lambda} \cdot u + \frac{1}{2} \frac{de^{\mu-\lambda}}{du} \cdot u^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} . \tag{6}$$

Ora lo spazio-tempo (4) non solo deve diventare euclideo a distanza infinita dal Sole, ma deve essere quasi euclideo anche a breve distanza dalla superficie del Sole; pertanto, sembra *a priori* giustificabile che si ponga nella (6)

$$(7) \qquad e^{2\mu-(\nu+\lambda)} = 1 + \alpha u \,, \quad e^{2\mu-\lambda} = 1 + \beta u \,, \quad e^{\mu-\lambda} = 1 + \gamma u \,,$$

essendo α, β, γ tre costanti da determinare, ovviamente indipendenti da h, k.

In conclusione, invece dello spazio-tempo (1) e dell'equazione dell'orbita (2), considereremo lo spazio-tempo e l'equazione dell'orbita che forniscono le (4), (6), tenendo presenti le (7).

Risulta, tenendo anche conto delle (5),

$$(8) \qquad ds^2 = -\frac{1+\beta u}{(1+\gamma u)^2}\,dr^2 - \frac{1+\beta u}{1+\gamma u}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1+\beta u}{1+\alpha u}\,dt^2 \,.$$

$$(9) \qquad r^2\frac{d\varphi}{ds} = h\,\frac{1+\gamma u}{1+\beta u}\,, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}\,\frac{1+\alpha u}{1+\beta u}\,, \quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}\,\frac{1+\gamma u}{1+\alpha u}\,.$$

$$(10) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\gamma u^2 = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right).$$

Si noti che per $\gamma = 0$ si ricade nei casi esaminati nella precedente Nota e che, in particolare, per $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = -2m = -$ Km. 2,94 si ha lo spazio-tempo (1) delle orbite kepleriane.

Veniamo alla determinazione delle costanti α, β, γ dello spazio-tempo (8). Possono farsi diverse determinazioni di queste costanti, ma soltanto le due di cui appresso si fa cenno si presentano spontanee, senza artificî. Altre determinazioni non mi appariscono giustificabili o soddisfacenti quand'anche le conseguenze di esse non possano dirsi contraddette dalle osservazioni.

3. Allo spazio-tempo (8) corrisponde l'equazione dell'orbita (10). Ora le osservazioni suggeriscono che, a sufficiente distanza dal Sole, il moto debba potersi ritenere kepleriano. È spontaneo allora ammettere che, quando si prescinda, nella (10), dal termine di valore piccolissimo $3/2\,\gamma u^2$, e quindi quando anche si ponga $\gamma = 0$, la (8) debba fornire lo spazio-tempo delle orbite kepleriane (1); poniamo, dunque, nella (8), $\alpha = 0$, $\beta = -2m$ perchè, allora, per $\gamma = 0$, risulta *esattamente* lo spazio-tempo (1) delle orbite kepleriane.

Avremo, in conseguenza, da considerare lo spazio-tempo

$$(11) \qquad ds^2 = -\frac{1-2mu}{(1+\gamma u)^2}\,dr^2 - \frac{1-2mu}{1+\gamma u}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2(1-2mu)\,dt^2$$

cui corrisponde l'orbita di equazione

$$(12) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\gamma u^2 = \frac{m}{h^2}\,.$$

Si tratta di determinare l'ultima delle costanti, la γ. Si è già accennato che il semplice postulato di proporzionalità tra massa ed energia porta come conseguenza una deflessione dei raggi luminosi nel campo gravitazionale solare. In particolare, un raggio stellare, passando rasente il bordo solare, dovrebbe subire una deflessione di circa 0″,87. Ora, perchè la (12) fornisca una tale deflessione ($ds = 0$, e quindi $h = \infty$), basta porre $\gamma = -m$; ma allora, dalla (12), si deduce pure uno spostamento secolare del perielio di Marte di circa 0″,7 e uno spostamento secolare del perielio di Mercurio di circa 21″, quando, effettivamente, l'astronomia attribuisce circa 5″ di spostamento al perielio di Marte e circa 42″ a quello di Mercurio. Se, dalla (12), si vuole dedurre uno spostamento di circa 42″ del perielio di Mercurio, basta porre $\gamma = -2m$. Allora la (12) stessa fornisce, per un raggio stellare che passi rasente il bordo solare, una deflessione di 1″,75. Per $\gamma = -2m$ le (11), (12) dànno lo spazio-tempo einsteiniano e l'orbita einsteiniana. Le (9) diventano

$$(13) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h \quad , \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}(1-2mu)^{-1} \quad , \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}(1-2mu)$$

l'ultima delle quali dice che, nel sistema di coordinate adottato r, φ, t, non è più valida la 2ª legge di Kepler. In altri termini, il passaggio dallo spazio-tempo kepleriano (1) a quello einsteiniano fa rinunziare, nel sistema di coordinate indicato, non solo alla prima ma anche alla seconda legge di Kepler.

4. Ritorniamo alla (8) per un'altra determinazione delle costanti α, β, γ. Stabiliamo, in primo luogo, di non rinunziare, nel sistema di coordinate adottato, alla 2ª legge di Kepler; per l'ultima delle (9) bisogna allora porre $\alpha = \gamma$. Stabiliamo ancora che dall'equazione dell'orbita (10), con $\alpha = \gamma$,

$$(14) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\alpha u^2 = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right) = \mathrm{A}$$

debba dedursi uno spostamento di circa 42″ del perielio di Mercurio. Poichè il moto deve riuscire quasi kepleriano, il valore del termine $\frac{3}{2}\alpha u^2$ dovrà riuscire trascurabile rispetto ad A. Integrando la (14) per approssimazioni successive $\Big($è ovvio che, quando si trascuri il termine $\frac{3}{2}\alpha u^2$, risulta in prima approssimazione $u = \mathrm{A}[1 + e\cos(\varphi-\omega)] = \frac{1}{a(1-e^2)}[1 + e\cos(\varphi - \omega)]\Big)$ si deduce che perchè la (14) fornisca lo spostamento richiesto del perielio di Mercurio, basta porre $\alpha = -2m$. Le (8), (9) e (10) diventano, per $\alpha = \gamma = -2m$:

$$(15)\quad ds^2 = \frac{1+\beta u}{(1-2mu)^2}\,dr^2 - \frac{1+\beta u}{1-2mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1+\beta u}{1-2mu}\,dt^2\,,$$

$$(16)\quad r^2\frac{d\varphi}{ds} = h\,\frac{1-2mu}{1+\beta u}\,,\quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}\,\frac{1-2mu}{1+\beta u}\,,\quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}\,,$$

$$(17)\quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3mu^2 = \frac{1}{2h^2}\left(-\beta - \frac{k^2}{c^2}\,2m\right),$$

e dovremo determinare la costante β. Poichè a sufficiente distanza dal Sole, l'orbita descritta da un punto materiale deve risultare quasi kepleriana, il secondo membro della (17) deve risultare, tenuto presente quanto si è detto a proposito delle (11), (12), pressochè eguale a $\frac{m}{h^2}$. Ora, quando si elimini ds tra la penultima delle (16) e la (15) si ricava che, per il moto dei pianeti, è approssimativamente $\frac{k^2}{c^2} = 1$; ne segue che dovrà porsi $\beta = -4m$. Risulta dunque lo spazio-tempo

$$(18)\quad ds^2 = -\frac{1-4mu}{(1-2mu)^2}\,dr^2 - \frac{1-4mu}{1-2mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1-4mu}{1-2mu}\,dt^2$$

dal quale si deduce: che per il moto di un punto materiale intorno al Sole vale, nel sistema di coordinate r, φ, t, la seconda legge di Kepler; che si ha uno spostamento secolare del perielio di Mercurio di circa 42″; che un raggio stellare, passando rasente il bordo solare, subisce una deflessione, non di 1″,75 ma di 0″,87.

Le osservazioni fatte sulla deflessione del raggio stellare, in occasione dell'ecclisse solare del 29 maggio 1919, conducono ad ammettere che essa debba essere dell'ordine di grandezza indicato da Einstein (1″,75), ma è noto che altre osservazioni saranno eseguite in proposito.

Dallo spazio-tempo (18) si deduce pure una influenza del campo gravitazionale sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella che si deduce dallo spazio-tempo einsteiniano.

5. Le determinazioni fatte delle costanti α, β, γ, nei casi precedentemente esaminati, dipendono dalla preferenza data allo spostamento del perielio di Mercurio in confronto a quello di Marte. Sono note le ragioni per cui non vengono presi in considerazione gli spostamenti dei perieli degli altri pianeti.

È chiaro che se si desse la preferenza allo spostamento del perielio di Marte, si otterrebbero risultati del tutto diversi. Così, perchè lo spazio-tempo (11) fornisca lo spostamento di circa 5″ indicato, basta porre $\gamma = -8m$ ma si deduce allora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di quello che effettivamente si attribuisce al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, che passi rasente il bordo solare, quadrupla di quella einsteiniana. Così, anche per il secondo caso considerato, quando si voglia dedurre lo spostamento di circa 5″ del perielio di Marte, si perviene allo spazio-tempo

$$(19)\quad ds^2 = -\frac{1-10\,mu}{(1-8\,mu)^2}\,dr^2 - \frac{1-10\,mu}{1-8\,mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1-10\,mu}{1-8\,mu}\,dt^2$$

dal quale si ricava ancora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di quello effettivamente attribuito al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, rasente il bordo solare, doppia di quella einsteiniana.

Ora è inammissibile che simili risultati possano rispondere alla realtà e pertanto non potrebbe restare *a priori* giustificata una preferenza allo spostamento del perielio attribuito a Marte in confronto a quello attribuito a Mercurio, ma tutto quanto è stato detto in questa Nota, e nella precedente, ribadisce che spetta ancora alle osservazioni di decidere sulla plausibilità dello spazio-tempo einsteiniano (11), $[\gamma = -2m]$, e quindi sulla portata delle equazioni gravitazionali nella forma prescelta da Einstein.

Meccanica — *Sul problema dei due corpi di massa variabile*. Nota di E. O. Lovett, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota interessante [1], presentata a questa Accademia il 2 maggio 1921 (che solo recentemente potei leggere nel corrispondente fascicolo dei Rendiconti) la Sig.na dott. Carla Maderni ha integrato le equazioni differenziali del problema dei due corpi di massa variabile, nell'ipotesi che la massa sia una funzione lineare del tempo e che l'attrazione varii in ragione inversa della quinta potenza della distanza.

Dalla lettura di questa Nota sono stato condotto ad un tipo di problema dei due corpi, più generale, in cui le equazioni differenziali del moto sono ancora riducibili alle quadrature.

Questo tipo include, come caso particolare, il problema dei due corpi di massa variabile, in cui la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza (attrattiva o repulsiva) come la q^{esima} potenza della distanza, p e q essendo due numeri quali si vogliono legati dalla relazione

$$2p + q + 3 = 0\,.$$

Ritengo che questo sia un nuovo caso di integrabilità, in cui è in particolare compreso ($p = 1$, $q = -5$) quello segnalato dalla Sig.na Maderni nella Nota citata.

[1] *Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile.*