ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

quello che effettivamente si attribuisce al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, che passi rasente il bordo solare, quadrupla di quella einsteiniana. Così, anche per il secondo caso considerato, quando si voglia dedurre lo spostamento di circa 5″ del perielio di Marte, si perviene allo spazio-tempo

$$(19)\quad ds^2 = -\frac{1-10\,mu}{(1-8\,mu)^2}\,dr^2 - \frac{1-10\,mu}{1-8\,mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1-10\,mu}{1-8\,mu}\,dt^2$$

dal quale si ricava ancora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di quello effettivamente attribuito al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, rasente il bordo solare, doppia di quella einsteiniana.

Ora è inammissibile che simili risultati possano rispondere alla realtà e pertanto non potrebbe restare *a priori* giustificata una preferenza allo spostamento del perielio attribuito a Marte in confronto a quello attribuito a Mercurio, ma tutto quanto è stato detto in questa Nota, e nella precedente, ribadisce che spetta ancora alle osservazioni di decidere sulla plausibilità dello spazio-tempo einsteiniano (11), $[\gamma = -2m]$, e quindi sulla portata delle equazioni gravitazionali nella forma prescelta da Einstein.

Meccanica — *Sul problema dei due corpi di massa variabile.* Nota di E. O. Lovett, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una Nota interessante [1], presentata a questa Accademia il 2 maggio 1921 (che solo recentemente potei leggere nel corrispondente fascicolo dei Rendiconti) la Sig.na dott. Carla Maderni ha integrato le equazioni differenziali del problema dei due corpi di massa variabile, nell'ipotesi che la massa sia una funzione lineare del tempo e che l'attrazione varii in ragione inversa della quinta potenza della distanza.

Dalla lettura di questa Nota sono stato condotto ad un tipo di problema dei due corpi, più generale, in cui le equazioni differenziali del moto sono ancora riducibili alle quadrature.

Questo tipo include, come caso particolare, il problema dei due corpi di massa variabile, in cui la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza (attrattiva o repulsiva) come la q^{esima} potenza della distanza, p e q essendo due numeri quali si vogliono legati dalla relazione

$$2p + q + 3 = 0\,.$$

Ritengo che questo sia un nuovo caso di integrabilità, in cui è in particolare compreso ($p = 1$, $q = -5$) quello segnalato dalla Sig.na Maderni nella Nota citata.

[1] *Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile.*

Si consideri il moto (relativo) di due corpi soggetti a mutue azioni attrattive o repulsive, quale rimane definito (colle solite notazioni) dal sistema differenziale

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \ , \ r^3 \frac{d^2r}{dt^2} + \varphi\left(\frac{r^2}{t}\right) = 0: \tag{1}$$

con φ si rappresenta una funzione, del resto arbitraria, in cui, per semplicità di scrittura, si è conglobato il quadrato della costante delle aree. Le unità si sono scelte in guisa da rendere eguale ad 1 la costante gravitazionale: volendo, si potrebbe supporre $= 1$ anche la costante delle aree c.

Il sistema (1) è integrabile per quadrature in quanto, nella seconda equazione, si possono separare le variabili mediante la sostituzione

$$r = e^{\lambda} z \quad , \quad t = e^{2\lambda} , \tag{2}$$

e designando al solito la base dei logaritmi naturali.

Infatti, ove si derivi r rapporto a t, prima una e poi una seconda volta, tenendo conto che z va risguardata come funzione di λ, si ottiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}(z + z') , \tag{3}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{4} e^{-3\lambda}(z'' - z) , \tag{4}$$

in cui z' e z'' rappresentano le derivate prima e seconda di z rispetto a λ. Sostituendo, nella seconda delle (1), a $\frac{d^2r}{dt^2}$ il suo valore (4), abbiamo, badando alla seconda delle (2),

$$z'' = z - 4\varphi(z^2)\, z^{-3} . \tag{5}$$

Questa equazione di secondo ordine in z è di forma integrabile, e una prima integrazione porge

$$z'^2 = z^2 - 8 \int \varphi(z^2)\, z^{-3}\, dz + h , \tag{6}$$

dove h è una costante additiva arbitraria, proveniente dall'integrazione.

Per fare qualche applicazione della (6) a casi particolari, giova trasformare alquanto il secondo membro, eseguendo nell'integrale una integrazione per parti. Si può così attribuire alla (6) la forma

$$z'^2 = z^2 + 4\varphi(z^2)\, z^{-2} - 8 \int \varphi'(z^2)\, z^{-1}\, dz + h , \tag{7}$$

dove φ' rappresenta la derivata di φ rispetto all'argomento z^2. Questa forma (7) ha altresì il vantaggio di mettere in evidenza il termine corrispondente a $\frac{c^2}{r^2}$ il quale, nell'equazione originaria (1), si trovava assorbito nella funzione arbitraria φ. Da (6) o da (7) si ricava, con un'ulteriore quadratura, l'espressione di λ sotto la forma

$$\lambda = \int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} + k, \tag{8}$$

dove k è la costante arbitraria introdotta dall'integrazione.

Determinata così λ come funzione di z, le equazioni (2) dànno immediatamente r quale funzione di t, e la prima delle (1) ci fornisce, con un'altra quadratura, anche θ in funzione di t. Rimanendo pertanto espresse sia r che θ, in funzione di t, risulta completamente determinato il moto definito dall'originario sistema differenziale (1).

Terminerò considerando quel caso speciale del problema in questione, in cui la funzione arbitraria φ ha la forma

$$\varphi = \sum_i \varphi_i\left(\frac{r^2}{t}\right)\left(\frac{t}{r^2}\right)^i, \tag{9}$$

rappresentando a lor volta le φ_i funzioni arbitrarie dell'argomento indicato e il sommatorio essendo esteso a un numero finito qualsiasi di valori di i.

Le equazioni differenziali (1) divengono in conformità

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\sum_i \varphi_i\left(\frac{r^2}{t}\right) t^i\, r^{-(2i+3)}, \tag{10}$$

e la corrispondente soluzione si ricava dalla (7) sotto la forma

$$z'^2 = z^2 + \sum_i a_i \left[\varphi_i(z^2)\, z^{-2(i+1)} - 2 \int \varphi_i'(z^2)\, z^{-2i+1}\, dz \right] + h, \tag{11}$$

in cui le costanti a_i sono definite dalle posizioni

$$(i+1)\, a_i = 4. \tag{12}$$

In particolare, se tutte le φ_i sono costanti, diciamo, per esempio,

$$\varphi_i = b_i, \tag{13}$$

scompaiono dalla (11) le quadrature non effettuate, e l'integrale assume lo aspetto semplice

$$z'^2 = z^2 + \sum_i c_i\, z^{-2(i+1)} + 4h, \tag{14}$$

in cui, per convenienza formale che apparirà tra un momento, si è scritto $4h$ in luogo di h, ponendo altresì

$$c_i = a_i b_i . \tag{15}$$

Dalla (14), mercè l'ulteriore sostituzione

$$z^2 = \frac{1}{u}, \tag{16}$$

si ricava, per il caso di cui ci occupiamo, l'integrale (8) sotto la forma particolare

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{\Sigma_i c_i u^{i+2} + 4hu + 1}} + k . \tag{17}$$

Se poi tutte le costanti b si suppongono nulle, salvo due, diciamo b_0 e b_p alle quali si attribuiscano i valori

$$b_0 = -1 \quad , \quad b_p = 1 , \tag{18}$$

l'integrale (17), in virtù delle definizioni (12) e (15), diviene

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a_p u^{p+2} - 4u^2 + 4hu + 1}} + k . \tag{19}$$

Quest'ultimo integrale (19) risolve il problema dei due corpi di massa variabile, quando la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza come la potenza q^{esima} della distanza, p e q rappresentando due numeri qualsivogliono legati dalla relazione lineare

$$2p + q + 3 = 0 . \tag{20}$$

È questo un caso abbastanza generale di integrabilità, che credo nuovo.

Supponiamo da ultimo $p = 1$ e osserviamo che, a norma della (12), $a_1 = 2$. Si ha in tal caso, dalla (19), l'integrale

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{2u^3 - 4u^2 + 4hu + 1}} + k , \tag{21}$$

il quale, moltiplicando per 2 (chè tale è il rapporto fra il λ usato dalla Sig.na Maderni e il mio), ovvero, ciò che è lo stesso, aggiungendo il fattore $\frac{1}{4}$ sotto il segno di radice, diviene identico al nuovo integrale assegnato dalla Sig.na Maderni, il cui scritto diede origine alla presente ricerca.