ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Fisica matematica. — *Capacità del condensatore a piatti infinitamente sottile.* Nota di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In due Note [1] ho ridotto il problema della distribuzione elettrica sopra il condensatore a piatti circolari alla risoluzione di due equazioni integrali. Ma i miei sforzi per dedurre nel caso generale l'elemento veramente importante, la capacità, non ebbero finora successo. Invece se si considera un condensatore ∞^{te} sottile rispetto al raggio dei piatti, è possibile dedurre, come mostro in questa Nota, che la capacità è data dalla formula $A + \frac{B}{l}$ dove A e B sono costanti e l la distanza dei due piatti: e precisamente è $A = \frac{a}{\pi}$ (a raggio dei piatti) e B dovrà dedursi sperimentalmente.

1. *Richiamo di risultati precedenti.* — Dette φ_1, φ_2 le due funzioni potenziali che sui piatti prendono rispettivamente valori $(+1, -1)$ $(+1, +1)$ esse si possono mettere sotto la forma

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \int_0^\infty \left(e^{\mp\left(z-\frac{l}{2}\right)s} - e^{\mp\left(z+\frac{l}{2}\right)s} \right) I_0(rs)\, \psi_1(s)\, ds\,, \\
\varphi_2 &= \int_0^\infty \left(e^{\mp\left(z-\frac{l}{2}\right)s} - e^{\mp\left(z+\frac{l}{2}\right)s} \right) I_0(rs)\, \psi_2(s)\, ds\,,
\end{aligned}
\right.
$$

e nel caso del condensatore ∞^{te} sottile si ha [2ª Nota (17) (18)].

$$
(2) \qquad \psi_1(s) = \frac{2}{\pi}\, \frac{\operatorname{sen} a\, s}{s(1 - e^{-ls})}\,, \quad \psi_2(s) = \frac{2}{\pi}\, \frac{\operatorname{sen} a\, s}{s(1 + e^{-ls})}\,.
$$

Ciò posto è facile dedurre l'espressione delle quantità di elettricità che si hanno sui due piatti. Siano queste $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ il primo indice riferendosi alle φ_1, φ_2 il secondo ai due piatti superiore ed inferiore.

Basta tener conto dei risultati del Beltrami [2] e si avrà coi dati (1) (2)

$$
e_{11} = -e_{12} = -\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty I_0'(as)\, \frac{\operatorname{sen} a\, s}{s(1 - e^{-ls})}\, ds\,,
$$

$$
e_{21} = e_{22} = -\frac{2a}{\pi} \int_0^\infty I_0'(as)\, \frac{\operatorname{sen} a\, s}{s(1 + e^{-ls})}\, ds\,.
$$

(1) *Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari.* R. Acc. Lincei, luglio-ottobre 1920.

(2) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Par. 2, Acc. Bologna, 1881, oppure Opere, T. III.

Facendo le sostituzioni $as = x$, $\frac{l}{a} = h$ e ricordando che $I_0'(x) = -I_1(x)$ ($I_1(x)$ funzione di Bessel di 1ª specie e d'ordine uno) si ha in definitiva

$$(3)\quad \begin{cases} e_{11} = -e_{12} = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1-e^{-hx})}\,dx\,, \\ e_{21} = e_{22} = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1+e^{-hx})}\,dx\,. \end{cases}$$

1. *Riduzione ad una equazione funzionale.* — Gli integrali che compaiono nelle (3) non si sanno calcolare. Osserviamo però che

$$e_{11} + e_{21} = \frac{4a}{\pi}\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1-e^{-2hx})}\,dx\,,$$

e mettendo quindi in evidenza che le e sono funzioni sulla sola h,

$$(4)\qquad e_{11}(h) + e_{21}(h) = 2\,e_{11}(2h)\,.$$

Se per $e_{21}(h)$ che è funzione regolare per $h = 0$ sostituiamo, essendo $h = \frac{l}{a}$ infinitesimo, il primo termine del suo sviluppo, avremo

$$(5)\qquad e_{21}(h) = e_{21}(0) = \frac{a}{\pi}\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{a}{\pi}\,,$$

perchè l'$\int$ vale 1 [1]. L'equazione funzionale (4) diventa

$$(4')\qquad e_{11}(h) + \frac{a}{\pi} = 2e_{11}(2h)\,.$$

Si può dimostrare che questa ha per soluzione generale la soluzione evidente

$$(5')\qquad e_{11}(h) = \frac{a}{\pi} + \frac{B'}{h}\,,$$

dove B' è una costante.

3. *Capacità del condensatore.* — Colle formole (5) (5') il problema della capacità è completamente risolto, cioè sono determinati i coefficienti nelle formole che legano potenziali e cariche. Se intendiamo come capacità, in una accezione più ristretta, la carica che si ha sopra uno dei piatti a potenziale 1 quando l'altro sia a potenziale *zero*, il calcolo può essere condotto in modo breve così. Ricordiamo che se φ_1, φ_2 sono i potenziali di due conduttori con cariche C_1, C_2 e $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ i potenziali degli stessi con cariche $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ si ha

$$\varphi_1\,C_1^{(1)} + \varphi_2\,C_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}\,C_1 + \varphi_2^{(1)}\,C_2 \ (^2)\,.$$

[1] V. p. Schaftlein, *Bessellschen Functionen*, pag. 79.

[2] Vedi p. es. Kirchhoff, *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*, 7ª Lez. N. 4.

Poniamo allora $\varphi_1^{(1)} = 1$, $\varphi_2^{(1)} = 0$ e poi una prima volta

$$\varphi_1 = 1\,,\ \varphi_2 = -1 \text{ quindi } C_1 = -C_2 = e_{11}\,,$$

e un'altra volta

$$\varphi_1 = 1\,,\ \varphi_2 = 1 \text{ quindi } C_1 = C_2 = e_{21}\,.$$

Avremo allora dalla formola citata, per le (5) (5'),

$$C_1^{(1)} - C_2^{(1)} = e_{11}\,,$$
$$C_1^{(1)} + C_2^{(1)} = e_{21}\,,$$

quindi

$$C_1^{(1)} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{21}) = \frac{a}{\pi} + \frac{B'}{2h} = \frac{a}{\pi} + \frac{B}{l} \tag{6}$$

dove B è una costante (delle dimensioni di una superficie) che dovrà dedursi sperimentalmente.

Relatività. — *Correzione di una grave discrepanza tra la teoria delle masse elettromagnetiche e la teoria della relatività. Inerzia e peso dell'elettricità.* Nota I di ENRICO FERMI, presentata dal Corrisp. G. ARMELLINI.

§ 1. La teoria delle masse elettromagnetiche fu studiata per la prima volta da Max Abraham (1), prima della scoperta della teoria della relatività. Abraham considerò la massa di un sistema di cariche elettriche, rigido nel senso della meccanica classica, e trovò che nell'ipotesi che un tale sistema avesse simmetria sferica, la sua massa era variabile con la velocità, e precisamente eguale (2) a $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ (essendo u l'energia elettrostatica del sistema e c la velocità della luce), per velocità nulle o molto piccole, mentre per velocità v confrontabili con c intervenivano dei termini di correzione un po' complicati dell'ordine di grandezza di $v^2:c^2$. Prima ancora della teoria della relatività Fitzgerald introdusse, come è noto, l'ipotesi che i corpi si

(1) M. Abraham, Theorie der Elektricität; Richardson, Elektron theory of Matter, cap. XI; Lorentz, The theory of elektrons, p. 37.

(2) Si dice ordinariamente che la massa elettromagnetica di uno strato sferico omogeneo di carica e, e di raggio r è $\frac{2}{3}\frac{e^2}{rc^2}$; se però si osserva che l'energia elettrostatica è $u = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$, si trova la massa $= \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.