

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane.* Nota I
di F. P. CANTELLI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. L'idea più geniale della Relatività generale consiste nel riguardare la traiettoria di un punto materiale in un campo gravitazionale, quando si tenga conto del tempo, come una geodetica di uno spazio-tempo a quattro dimensioni.

È noto che Einstein caratterizza la metrica di questo spazio-tempo mediante certe equazioni alle derivate parziali, dette equazioni gravitazionali, che, pur involgendo una discreta arbitrarietà, hanno condotto a spiegare o a prevedere fenomeni confermati dalle osservazioni.

Sembra interessante di seguire un cammino inverso a quello accennato; cioè, partire dalle equazioni della traiettoria, considerando questa ultima come suggerita dalle osservazioni e, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali, esaminare quale debba essere la metrica di uno spazio-tempo affinché quella traiettoria rappresenti una geodetica di esso.

In questa prima Nota mi occupo dello spazio-tempo che conduce alle orbite kepleriane.

2. La presenza di un'unica massa, ad esempio il Sole, genera uno spazio-tempo quadridimensionale il cui quadrato dell'elemento lineare, per intuitive e note considerazioni di simmetria ⁽¹⁾, ha la forma

$$(1) \quad ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) + c^2 e^{\nu} \cdot dt^2$$

in cui r, θ, φ sono coordinate analoghe alle polari che fissano la posizione di un punto nello spazio ⁽²⁾; t è il tempo; c^2 il quadrato della velocità della luce; λ, μ, ν sono tre funzioni della sola r , che tendono a zero per $r \rightarrow \infty$ poichè a distanza infinita dalla massa, generatrice dello spazio-tempo (1), quest'ultimo deve diventare euclideo.

⁽¹⁾ Cfr., ad. es., Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio*, ecc. (Nuovo Cimento, serie VI, vol. XIV, fascicolo luglio 1917).

⁽²⁾ Si noti che r non rappresenta, in generale, la distanza del punto materiale dal polo. Si rileverà però facilmente in seguito che se r, r' sono i parametri che fissano la posizione di due punti sopra una linea $\theta = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ (geodetica) uscente dal polo, $r-r'$ esprime la distanza dei due punti, a meno di una quantità trascurabile, quando essi siano sufficientemente lontani dal polo.

Per le ragioni di simmetria addotte, la traiettoria di un punto materiale, quando si elimini il tempo, ha luogo in un piano (più precisamente superficie geodetica), $\theta = \text{cost.}$ che possiamo supporre sia il piano $\theta = \frac{\pi}{2}$; è perciò che ci limitiamo a considerare lo spazio-tempo tridimensionale il cui quadrato dell'elemento lineare è:

$$(2) \quad ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu r^2 d\varphi^2 + c^2 e^\nu dt^2.$$

Per la determinazione delle funzioni incognite λ, μ, ν ricaveremo la equazione in r, φ della traiettoria, rappresentatrice di una geodetica dello spazio-tempo (2), e la identificheremo con la nota equazione, in coordinate polari, col polo nel fuoco, di una conica.

3. Le tre equazioni di una geodetica dello spazio-tempo (2) equivalgono, a determinazione fatta, alla (2) stessa e alle altre:

$$(3) \quad e^\mu r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2} e^{-\nu},$$

essendo k, h due costanti di integrazione. La eliminazione di dt, ds tra (2) e (3), quando si ponga $u = 1/r$, conduce, dopo i necessari passaggi, alla equazione

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + e^{\mu-\lambda} u + \frac{1}{2} \frac{de^{\mu-\lambda}}{du} u^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du}$$

che identificheremo con l'equazione

$$(5) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = a = \text{cost.}$$

la quale ammettiamo sia giustificata dalle osservazioni.

Le funzioni λ, μ, ν , non dipendenti da k, h , debbono condurre alla (5) in cui a deve essere, in generale, dipendente da k, h .

Ponendo $a = f(k, h)$, il paragone fra (4), (5) conduce a scrivere

$$(6) \quad \begin{cases} \psi(u) = e^{\mu-\lambda} u + \frac{1}{2} \frac{de^{\mu-\lambda}}{du} u^2 - u \\ \psi(u) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} - \frac{1}{2h^2} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} - f(k, h) \end{cases}$$

nell'ultima delle quali va considerata come incognita anche $f(k, h)$.

4. Dalla prima delle (6) risulta che $\psi(u)$ deve essere indipendente da k, h . Derivando, pertanto, la seconda delle (6), parzialmente, prima rispetto a k e poi rispetto ad h , deve aversi identicamente

$$(7) \quad \begin{cases} f'_k(k, h) = -\frac{k}{c^2 h^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} \\ f'_h(k, h) = -\frac{1}{h^3} \frac{k^2}{c^2} \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} + \frac{1}{h^3} \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} \end{cases}$$

I primi membri delle (7) debbono essere indipendenti da u ; altrettanto deve essere dei secondi membri. Essendo, pertanto, α, β due costanti qualsiasi, indipendenti da k, h , dobbiamo scrivere

$$(8) \quad \frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du} = \alpha, \quad \frac{de^{2\mu-\lambda}}{du} = \beta$$

e poichè μ e λ debbono tendere a zero per $u \rightarrow 0$, si deduce

$$(9) \quad e^{2\mu-(\nu+\lambda)} = \alpha u + 1, \quad e^{2\mu-\lambda} = \beta u + 1.$$

Le (7), (9) forniscono ovviamente

$$(10) \quad f(k, h) = a = \frac{1}{2} \frac{k^2 \alpha}{c^2 h^2} - \frac{\beta}{2h^2} + \gamma$$

essendo γ una nuova costante indipendente da k, h . Sostituendo la (10) nella seconda delle (6), e tenendo presenti le (9), risulta $\psi(u) + \gamma = 0$ la quale, per la prima delle (6), dà un'equazione differenziale in $e^{u-\lambda}, u$, che integrata fornisce

$$(11) \quad e^{u-\lambda} = 1 - \frac{2\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^2}$$

e, poichè il primo membro di (11) per $u \rightarrow 0$ deve tendere all'unità, deve essere

$$(12) \quad \gamma = \delta = 0.$$

5. Le (9), (10), (11), (12) portano a scrivere

$$(13) \quad e^\nu = \frac{\beta u + 1}{\alpha u + 1}; \quad e^\mu = e^\lambda = \beta u + 1$$

$$(14) \quad f(k, h) = a = \frac{1}{2h^2} \left(\frac{k^2 \alpha}{c^2} - \beta \right).$$

Si può concludere che affinchè lo spazio-tempo quadridimensionale (1), soddisfacente alla condizione posta

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda = 0,$$

ammetta geodetiche che possano essere rappresentate da traiettorie di equazione

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = a,$$

è necessario e sufficiente che valgano le (13), essendo α, β due costanti arbitrarie, indipendenti, come si è detto, da h, k che hanno il significato fornito dalle (3). Il valore di a è allora dato dalla (14).