ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1922.

F. D'Ovidio, Presidente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su una classe di serie di polinomi di una variabile complessa.* Nota di N. Abramescu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In questa Nota mi propongo di trovare il campo di convergenza delle serie di polinomi di una variabile complessa, $\Sigma a_n P_n(x)$, i polinomi $P_n(x)$ essendo legati (1) dalle relazioni

$$(1)\quad P_{n+1}(t)=tP_n(t)-\frac{\alpha_1}{\alpha}P_{n-1}(t)-\cdots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha}P_1(t)+(n+1)\frac{\alpha_n}{\alpha}\,,\; n=2,3\ldots,$$

$$P_1(t)=-t\;,\; t=\frac{x-\alpha_0}{\alpha}\,.$$

dove $\alpha,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots$ sono quantità date, e $a_0, a_1,\ldots,a_n,\ldots$ quantità conosciute di modo che $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\varrho}$, $\varrho=c-te>1$.

I. Considereremo da prima il caso nel quale la relazione (1) contiene $(k+1)$ polinomi,

$$(2)\quad P_{n+1}(t)=tP_n(t)-\frac{\alpha_1}{\alpha}P_{n-1}(t)-\cdots-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha}P_{n-k+1}(t)\,,\quad n=2,3,\ldots,$$

$$\alpha_s=0\;,\; s>k-1\;,\; P_1(t)=-t=-\frac{x-\alpha_0}{\alpha}\,.$$

(1) Veggansi i problemi analoghi studiati nelle mie Note: *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa* (questi Rendiconti, 1° sem. 1922, fasc. 3°, pag. 89) e *Sulle serie di polinomi di Darboux e di Poincaré* (ibid., fasc 4°, pag. 152).

Cambiando n in $(n+k-1)$, la relazione (2) diviene

$$(3) \qquad P_{n+k}(t) - t\,P_{n+k-1}(t) + \frac{\alpha_1}{\alpha}\,P_{n+k-2}(t) + \cdots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha}\,P_n(t) = 0\,,$$

$$t = \frac{x-\alpha_0}{\alpha}\,,$$

che è una relazione ricorrente di Poincaré [1],

$$(4) \qquad Q_k(x)\,P_{n+k}(x) + Q_{k-1}(x)\,P_{n+k-1}(x) + \cdots + Q_0(x)\,P_n(x) = 0\,,$$

$Q_s(x)$ essendo funzioni che dipendono da x e da n.

La serie di Poincaré, $\Sigma a_n\,P_n(x)$, nella quale i polinomi $P_n(x)$ sono legati dalle relazioni (4), ha il campo di convergenza limitato dalla curva [2]

$$(5) \qquad |\beta(x)| = \varrho\,,$$

$\beta(x)$ essendo la radice di più grande modulo dell'equazione

$$(6) \qquad F(\lambda) = \lambda^k + A_{k-1}\,\lambda^{k-1} + \cdots + A_0 = 0\ ,\ A_s = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_s}{Q_k}\,.$$

Nel caso in cui i polinomi $P_n(x)$ sono legati dalle relazioni (2), l'equazione (6) diviene

$$(7) \qquad F(\lambda) = \alpha\lambda^k - (x-\alpha_0)\,\lambda^{k-1} + \alpha_1\,\lambda^{k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} = 0\,.$$

Facendo in questa equazione la sostituzione

$$(8) \qquad x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-1}\,,\quad |X| < 1\,,$$

otteniamo

$$F(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{X}\right)\Phi(\lambda)\,,$$

$$\Phi(\lambda) = \alpha\,\lambda^{k-1} - (\alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-1})\,\lambda^{k-2} - \\ - (\alpha_2 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-2})\,\lambda^{k-3} - \cdots - \alpha_{k-1} X\,.$$

Si può poi dimostrare (cfr. § II) che $\lambda = \frac{1}{X}$ è la radice di massimo modulo dell'equazione (7) e che *il campo di convergenza delle serie* $\Sigma a_n\,P_n(x)$, *i polinomi* $P_n(x)$ *essendo legati dalle relazioni* (2), *è limitato dalle curve che si ottengono dai cerchi* $|X| = \frac{1}{\varrho} < 1$ *mediante la trasformazione*

$$x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{k-1} X^{k-1}\ ,\ |X| = \frac{1}{\varrho} = C-te\,.$$

(1) Poincaré, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Mathematics, vol. VII); Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, pag. 419.

(2) Ibid..

ESEMPI. — 1°. $P_{n+1} = \frac{x - \alpha_0}{\alpha} P_n$. La curva di convergenza è il cerchio

$$x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0, \quad |X| = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{1}{\varrho} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

di raggio $|\alpha|\varrho$. Si ritrova dunque la regola di Cauchy-Hadamard per la serie Taylor.

2°. $P_{n+1}(t) = t P_n(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n-1}(t)$, $t = \frac{x - \alpha_0}{\alpha}$. Le curve di convergenza sono ellissi omofocali date dalla trasformazione

$$x = \frac{\alpha}{X} + \alpha_0 + \alpha_1 X \, ; |X| = \frac{1}{\varrho} = C - te < 1 .$$

Nel caso dei polinomi di Tchebicheff,

$$P_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n = 2^n x^n + \dots ,$$

abbiamo $P_n - 2x P_{n-1} + P_{n-2} = 0$. Osserviamo che in (2) $P_n(x)$ sono ordinati secondo le potenze di $\frac{x - \alpha_0}{\alpha} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$,

$$\frac{1}{2} P_n - x P_{n-1} + \frac{1}{2} P_{n-2} = 0 ,$$

dunque le curve di convergenza sono le ellissi

$$x = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right), \ |X| = \frac{1}{\varrho} < 1, \left(\alpha_0 = 0 \, , \ \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}\right),$$

coi fuochi -1, $+1$.

II. Consideriamo il caso generale nel quale i polinomi $P_n(x)$ sono legati dalle relazioni

$$P_{n+1}(t) = t P_n(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha} P_{n-1}(t) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha} P_1(t) + (n+1) \frac{\alpha_n}{\alpha} ,$$

$$P_0 = 1 \, , P_1 = -t \, , t = \frac{x - \alpha_0}{\alpha} \, , \overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 1 \, , \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho} < 1 .$$

Facendo $n = 1, 2, 3, \dots$, risulta, dalle relazioni ottenute, che, x appartenendo al campo di convergenza delle serie $\Sigma a_n P_n(x)$, la serie in Z (Z abbastanza piccolo)

$$P_1(x) + Z P_2(x) + \dots + Z^n P_{n+1}(x) + \dots \tag{9}$$

è il quoziente di due serie

$$\frac{c_1 + c_2 Z + \dots + c_{n+1} Z^n + \dots}{b_1 + b_2 Z + \dots + b_{n+1} Z^n + \dots} = P_1 + Z P_2 + \dots + Z^n P_{n+1} + \dots, \ b_1 \neq 0. \tag{10}$$

Per identificazione, paragonando le relazioni trovate con quelle ottenute facendo in (1) $n = 1, 2, 3, \ldots$, troviamo

$$c_1 = -(x-\alpha_0),\ c_2 = 2\alpha_1,\ c_3 = 3\alpha_2, \ldots, c_{n+1} = (n+1)\alpha_n, \ldots,$$
$$b_1 = \alpha,\ b_2 = -(x-\alpha_0),\ b_3 = \alpha_1, \ldots, b_{n+1} = \alpha_{n-1}, \ldots,$$

sicchè le serie $\Sigma c_n Z^n$, $\Sigma b_n Z^n$ hanno lo stesso cerchio di convergenza di raggio $\dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|}} = 1$.

Se x è nel campo di convergenza della serie $\Sigma a_n P_n(x)$, abbiamo

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|P_n(x)|} < 1,\ \overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|} < \varrho.$$

La serie (9) è convergente se

$$|Z|\, \overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n|} < 1,\ |Z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n|}}.$$

Se dunque si prende

$$|Z| < \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n(x)|}},$$

avremo a fortiori

$$|Z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|P_n|}},$$

e per conseguenza lo sviluppo (10) è valevole nello stesso tempo che lo sviluppo $\Sigma a_n P_n(x)$.

Ne segue che, quando x è nella regione di convergenza della serie $\Sigma a_n P_n(x)$ e $|Z| < \dfrac{1}{\varrho}$, la relazione (10) si scrive

$$\frac{\alpha_0 - x + 2\alpha_1 Z + \cdots + (n+1)\alpha_n Z^n + \cdots}{\alpha + (\alpha_0 - x) Z + \alpha_1 Z^2 + \cdots + \alpha_{n-1} Z^n + \cdots} = P_1(x) + ZP_2(x) + \cdots,$$

$$\frac{Z\varphi'(Z) + \varphi(Z) - x}{\alpha + Z\varphi(Z) - Zx} = P_1(x) + ZP_2(x) + \cdots, \tag{11}$$

$$\varphi(Z) = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \cdots + \alpha_n Z^n + \cdots,\ \varphi'(Z) = \frac{d\varphi}{dZ},$$

e $\varphi(Z)$ è regolare nel cerchio di raggio 1. Ponendo

$$z = \frac{\alpha}{Z} + \varphi(Z), \tag{12}$$

abbiamo lo sviluppo

$$\frac{z'}{z-x} = -\frac{1}{Z} + P_1(x) + ZP_2(x) + \cdots,\ z' = \frac{dz}{dZ}. \tag{13}$$

valido solamente per i punti x del campo di convergenza delle serie $\Sigma a_n P_n(x)$, $|Z| < \frac{1}{\varrho}$.

Ma lo sviluppo (13) vale solamente per $|x| < |z|$; ne segue che *il campo di convergenza delle serie* $\Sigma a_n P_n(x)$, *i polinomi* $P_n(x)$ *essendo legati dalle relazioni* (1), *è limitato dalle curve corrispondenti ai cerchi* $|X| = \frac{1}{\varrho} < 1$ *nella trasformazione*

$$(12) \qquad x = \frac{\alpha}{X} + \varphi(X), \ \varphi(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n + \cdots,$$

dove α_i *sono i coefficienti che entrano nelle relazioni* (1) *e* $\overline{\lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 1$, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\varrho}$.

Essendo dati i polinomi $P_n(x)$ legati dalle relazioni (1), si possono dedurre da queste relazioni i coefficienti α_i della trasformazione (12). Si può anche calcolare la funzione $\varphi(Z)$ mediante la relazione (11) quando si sa fare la somma delle serie (9), dove i polinomi $P_n(x)$ devono essere introdotti ordinati secondo le potenze di $\frac{x - \alpha_0}{\alpha}$, ed il coefficiente di x^n nel polinomio $P_n(x)$ deve essere $-\frac{1}{\alpha^n}$.

Esempio. Consideriamo i polinomi $P_n(x)$ la cui funzione generatrice è

$$\frac{Z - x\sqrt{1 + Z^2}}{1 + Z^2 - xZ\sqrt{1 + Z^2}} = P_1(x) + Z\,P_2(x) + \cdots + Z^n P_{n+1}(x) + \cdots,$$

oppure

$$\frac{\dfrac{Z}{\sqrt{1 + Z^2}} - x}{\sqrt{1 + Z^2} - xZ} = \frac{-x + Z - \dfrac{Z^3}{2} + \dfrac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\dfrac{Z^5}{2^2} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\dfrac{Z^7}{2^3} + \cdots}{1 - xZ + \dfrac{Z^2}{2} - \dfrac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}\dfrac{Z^4}{2^2} + \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\dfrac{Z^6}{2^3} - \cdots}$$

Identificando, si vede che i polinomi $P_n(x)$ verificano le relazioni (1), con $\alpha = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \ldots$ La funzione $\varphi(Z)$ è data dalla equazione (11), mentre le curve di convergenza sono date dalla transformazione

$$z = \frac{\alpha}{Z} + \varphi(Z) = \frac{\sqrt{1 + Z^2}}{Z}, |Z| = c - te < 1,$$

$$\sqrt{|z - 1| \cdot |z + 1|} = \frac{1}{|Z|} = C - te,$$

e sono ovali di Cassini.