ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Sulla equazione funzionale* $f(x+y)=f(x)\,f(y)$. Nota II di SILVIO MINETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

IV. SUBORDINAZIONE DELLA CONTINUITÀ IN UN PUNTO GENERICO ALLA CONTINUITÀ A DESTRA DELL'ORIGINE. — È ora tempo di osservare che se noi riuscissimo a dimostrare la necessaria continuità destra della $\varphi(x)$ nel punto zero, ossia che è $\lim\limits_{x \to (+0)} \varphi(x) = 1$, allora, in causa delle eguaglianze

$$|\,\varphi(x+h) - \varphi(x)\,| = |\,\varphi(x)\,\varphi(h) - \varphi(x)\,| = \varphi(x)\,|\,\varphi(h) - 1\,|$$
$$|\,\varphi(x-h) - \varphi(x)\,| = |\,\varphi(x-h) - \varphi(x-h)\,\varphi(h)\,| = \varphi(x-h)\,|\,1 - \varphi(h)\,|,$$

se ne potrebbe concludere la continuità destra e sinistra in tutto l'intervallo.

V. CONTINUITÀ PER $x \longrightarrow (+0)$. — Ciò posto, proviamoci ad ammettere che la $\varphi(x)$, per x tendente a $(+0)$, non abbia il limite uno.

Si dovrebbe in tal caso necessariamente trovare, a destra dello zero, almeno un gruppo infinito di punti che ammette l'origine come punto limite, e nel quale gruppo la $\varphi(x)$ soddisfa alla

$$\varphi(x) = 1 + \psi \;,\; \text{dove } |\,\psi\,| > \sigma \tag{3}$$

con σ sufficientemente piccolo ma $\neq$ da zero e determinabile *a priori*.

Scelto allora un $\eta < \dfrac{b-a}{2}$, si considerino gl'infiniti intervalli, aventi un estremo comune nell'origine e di ampiezze

$$\frac{\eta}{2^0}, \frac{\eta}{2^1}, \frac{\eta}{2^2}, \frac{\eta}{2^3} \ldots, \frac{\eta}{2^n}, \ldots \tag{4}$$

e siano $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ punti del gruppo citato rispettivamente interni agli intervalli suddetti e nei quali quindi è soddisfatta la (3).

In tale successione di punti distinguiamo quelli in cui la $\varphi(x)$ è $<$ dell'unità, da quelli in cui $\varphi(x)$ è $>$ dell'unità; i primi si indichino con

$$x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n, \ldots \tag{5}$$

[1] Presentata nella seduta del 19 giugno 1921. Ved. Nota I pubblicata in questi Rendiconti, pag. 12.

ed i secondi con

$$(6) \qquad x_0'', x_1'', x_2'', x_3'', \ldots, x_n'', \ldots$$

notando che la somma di un numero qualunque di x' o x'' è in ogni caso $<$ di 2η.

Una almeno di queste due successioni consterà di infiniti elementi.

Se tale è la (5), in forza della (1), varranno contemporaneamente le diseguaglianze:

$$\varphi(2\eta) = \varphi(x_0')\,\varphi(2\eta - x_0') \leq (1-\sigma)\,\mathrm{M}$$

$$\varphi(2\eta) = \varphi(x_0')\,\varphi(x_1')\,\varphi[2\eta - (x_0' + x_1')] \leq (1-\sigma)^2\,\mathrm{M}$$

$$\varphi(2\eta) = \varphi(x_0')\,\varphi(x_1')\,\varphi(x_2')\,\varphi[2\eta - (x_0' + x_1' + x_2')] \leq (1-\sigma)^3\,\mathrm{M}\,,$$

ecc., *ad infinitum*.

Ne consegue che $\varphi(2\eta)$ dovrebbe essere minore di ogni numero comunque piccolo; quindi

$$\varphi(2\eta) = 0\,,$$

che a sua volta porta per conseguenza

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{per } 0 < x \leq (b-a)$$

riportandoci al caso banale.

Consideriamo ora il caso in cui la successione con infiniti elementi è la (6). Allora, sempre in forza della (1), sarà

$$\varphi(x_0'')\,\varphi(x_1'')\,\varphi(x_2'')\ldots\varphi(x_n'') = \varphi(x_0'' + x_1'' + x_2'' + \ldots + x_n'') =$$
$$= \varphi(\xi_n) \geq (1+\sigma)^n\,.$$

ove

$$0 < \xi_n \leq 2\eta < (b-a)\,,$$

e quindi, per un n convenientemente grande, la $\varphi(x)$ nel punto $x = \xi_n$ supererebbe qualunque quantità prefissata, contro l'ipotesi 3).

VI. Conclusione. — Dunque la $\varphi(x)$ per x tendente a $(+0)$, sotto le poste ipotesi, ammette il limite uno; è cioè necessariamente continua a destra dell'origine.

Ma, per quanto si è più sopra fatto osservare (vedi n. IV), ciò basta per conchiudere che essa è continua a destra e a sinistra in ogni altro punto dell'intervallo in cui è stata definita, e che quindi è della forma e^{kx}.

Segue, per la necessaria continuità anche della $f(x)$ [data la posizione (2)]

$$f(x) = e^{kx}\,.$$