ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota I di ENRICO FERMI, presentata dal Corrispondente G. ARMELLINI.

1. Per fare lo studio dei fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, cioè, in linguaggio non relativistico, in una porzione di spazio, variabile eventualmente col tempo, ma sempre molto piccola in confronto alle divergenze dall'euclideità, della varietà spazio-tempo, converrà anzi tutto ricercare un opportuno riferimento tale che, in vicinanza della linea studiata, il ds^2 della varietà prenda una forma semplice. Per trovare questo riferimento, dobbiamo premettere qualche considerazione geometrica.

Sia data in una varietà riemanniana V_n, od anche in una varietà metricamente connessa nel senso di Weyl [1], una linea L. Associamo ad ogni punto P di L una direzione y, perpendicolare ad L, con la legge che la direzione $y + dy$, relativa al punto $P + dP$, si deduca da quella y relativa a P, nel seguente modo: Sia η la direzione tangente ad L in P; si trasportino parallelamente [2] y, η da P in $P + dP$ e siano $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ le direzioni così ottenute, che per le proprietà fondamentali del trasporto parallelo saranno ancora ortogonali. Se L non è geodetica $\eta + \delta\eta$ non coinciderà con la direzione $\eta + d\eta$ della tangente ad L in $P + dP$, e queste due direzioni individueranno in $P + dP$ una giacitura. Consideriamo in $P + dP$ l'elemento di S_{n-2} perpendicolare ad essa e ruotiamo rigidamente attorno a tale S_{n-2} tutta una particella circostante $P + dP$, fino a che $\eta + \delta\eta$ non vada a sovrapporsi ad $\eta + d\eta$. Allora $y + \delta y$ andrà a finire in una posizione che prenderemo come direzione $y + dy$ relativa al punto $P + dP$. Si intende bene come, fissata a piacere la direzione y in un punto di L, un processo di integrazione permetta di conoscerla per tutti i punti di L.

Cerchiamo ora le espressioni analitiche traducenti le operazioni indicate per una varietà riemanniana, che sono identiche a quelle valevoli per una varietà metrica di Weyl purchè si abbia l'avvertenza di scegliere la « Eichung » in guisa che la misura di un segmento, che si muova rigidamente nelle vici-

(1) Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, pag. 109. Berlin, Springer, 1921.
(2) T. Levi-Civita, Rend. Circ. Palermo, tomo XLII, pag. 173, an. 1917.

nanze di L, sia costante. Sia

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

e siano $y_i, y^{(i)}$; $\eta_i, \eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ i sistemi co- e controvarianti delle direzioni y, η. Avremo intanto

$$\frac{\delta\eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds};$$

è inoltre $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. Si trova dunque

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -\,\mathrm{C}^i.$$

Le C^i sono le componenti controvarianti del vettore C, curvatura geodetica, cioè di un vettore che ha l'orientazione della normale principale geodetica di L e grandezza eguale alla sua curvatura geodetica.

Si ha d'altra parte

$$(2) \qquad \frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}.$$

Ora, siccome y è perpendicolare ad L, lo spostamento, con cui da $y + \delta y$ si deduce $y + dy$, sarà parallelo alla tangente ad L e avrà grandezza eguale alla proiezione sopra y stesso di $\delta\eta - d\eta$; vale a dire, siccome y ha lunghezza 1, al prodotto scalare di $\delta\eta - d\eta$ per y, cioè

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -\,ds \sum_i \mathrm{C}_i y^{(i)}.$$

Le sue componenti controvarianti si otterranno dunque moltiplicando la sua grandezza per le coordinate controvarianti della tangente ad L, cioè $\frac{dx_i}{ds}$. Esse son dunque, in ultima analisi, $-\,dx_i \sum_r \mathrm{C}_r y^{(r)}$. Da (2) risulta ora immediatamente

$$(3) \qquad \frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h \mathrm{C}_h y^h.$$

La (3), scritta per $i = 1, 2, \dots, n$, dà un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine tra le n incognite $y^{(1)}\, y^{(2)} \dots y^{(n)}$ che risultano così determinate, una volta che ne siano assegnati i valori iniziali. Sarebbe anche facile verificare formalmente dalle (3) che, se i valori iniziali delle $y^{(i)}$ soddisfano la condizione di perpendicolarità ad L, tale condizione resta verificata lungo tutta la linea.

2. In un punto P_0 di L assegnamo ora a piacere n direzioni $y_1\, y_2 \dots y_n$ mutuamente ortogonali, con la condizione che y_n sia tangente ad L. Le direzioni $y_1\, y_2 \dots y_{n-1}$ saranno perpendicolari ad L e potremo trasportarle lungo L con la legge assegnata al § precedente che, come è evidente dalla

sua stessa definizione, conserva la loro ortogonalità. In tale modo veniamo ad associare ad ogni punto di L n direzioni mutuamente ortogonali, di cui l'ultima è quella della tangente ad L. Pensiamo ora la nostra V_n immersa in un S_N euclideo a un numero conveniente di dimensioni. Possiamo prendere come coordinate di un punto di V_n le coordinate cartesiane ortogonali della sua proiezione sopra l'S_n tangente a V_n in un punto generico P di L, aventi per origine P e per direzioni le direzioni $y_1\, y_2 \ldots y_n$ relative al punto P. Con tali coordinate l'elemento metrico di V_n in P prende la forma $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$; esse inoltre, come immediatamente si riconosce, sono geodetiche in P. Vale a dire, per le coordinate y si può nell'intorno di P porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, $g_{ii} = 1$ $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. È manifesto che di tali riferimenti ne avremo uno per ogni punto di L. Consideriamo ora un punto Q_0 di V_n che nel riferimento relativo al punto P_0 di L abbia coordinate $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_{n-1}, 0$. Per ogni altro punto P di L possiamo allora determinare un punto Q che, nel riferimento relativo a P, abbia le stesse coordinate che ha Q_0 nel riferimento relativo a P_0. Il punto Q percorrerà così una linea di decorso parallelo ad L. Vogliamo ora trovare la relazione che lega ds_Q a ds_P nell'ipotesi che Q sia infinitamente prossimo a P. Perciò osserviamo che lo spostamento che porta Q in $Q + dQ$ è composto degli spostamenti indicati al § 1 con δ e con $d - \delta$ e che il primo, essendo uno spostamento parallelo, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\delta s_Q = ds_P$; il secondo è una rotazione che, come si è visto al § 1, dà $(d - \delta)\, s_Q = ds_P\, C \times Q - P$, se con $\times$ si indica il simbolo del prodotto scalare e con $Q - P$ il vettore di origine P e termine Q. Inoltre ds_Q e $(d - \delta)\, s_Q$ hanno entrambi la direzione della tangente in L. Si ha dunque $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)\, s_Q$; cioè

$$ds_Q = ds_P [1 + C \times Q - P]. \tag{4}$$

Le traiettorie dei punti Q formano una $(n-1)^{upla}$ infinità di linee e quindi, almeno con opportune limitazioni, per ogni punto M di V_n passerà una di tali linee; così che potremo caratterizzare M mediante le coordinate del punto Q, $\overline{y}_1\, \overline{y}_2 \ldots \overline{y}_{n-1}$ corrispondenti alla linea passante per M, e l'arco s_P di linea L contato da un'origine arbitraria fino a quel punto P che corrisponde al Q coincidente con M.

Se M è infinitamente prossimo ad L, ds_Q sarà perpendicolare alla ipersuperficie $s_P = \text{costante}$. Si avrà perciò

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\overline{y}_1^2 + d\overline{y}_2^2 + \cdots + d\overline{y}_{n-1}^2 ;$$

e, tenendo presente (4),

$$ds_M^2 = (1 + C \times M - P)^2\, ds_P^2 + d\overline{y}_1^2 + d\overline{y}_2^2 + \cdots + d\overline{y}_{n-1}^2. \tag{5}$$

Nelle vicinanze di L abbiamo con ciò trovata una espressione semplicissima del ds^2.