ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

potremmo assumere: $\varDelta D = -6',9$, $\varDelta I = -0',7$, $\varDelta H = +1,3\,\gamma$: quantità quest'ultima quasi evanescente. La realtà è che l'intensità H, dopo il 1892, in Italia ha continuato ancora a crescere, ma con moto rallentato, poi ha raggiunto il massimo, ed ora è nella fase inoltrata di decrescimento, come fu dimostrato per Terracina.

Queste nozioni sulle variazioni magnetiche secolari sono qui date a titolo provvisorio, poichè sull'argomento dovremo tornare in seguito, con un altro scritto, ove le studieremo a fondo, facendo tesoro di tutte le osservazioni fatte in tempi diversi del passato, nelle stazioni di ripetizione, allo scopo di determinare la forma della funzione rappresentatrice delle variazioni stesse.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les fonctions génératrices des polynomes de Laguerre.* Nota di A. Angelesco, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Le polynome $P_n(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} - ny = 0\,, \tag{1}$$

où n est un entier positif, a été rencontré et étudié par Laguerre [1] dans son mémoire sur l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,.$$

Laguerre donne [2] aussi le développement

$$\frac{1}{1-\alpha}\,e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x)\,. \tag{2}$$

1. Formons une équation aux dérivées partielles à laquelle doivent satisfaire toutes les fonctions génératrices de la forme

$$z(\alpha\,, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\, C_n\, P_n(x)\,, \tag{3}$$

où C_n est un coefficient ne dépendant pas de x et α.

[1] Œuvres de Laguerre, t. 1, pag. 428.
[2] Loc. cit., pag. 436.

Considérons, pour cela, la relation

$$x\,P''_n(x) + (x+1)\,P'_n(x) - n\,P_n(x) = 0\,. \tag{4}$$

En la multipliant par $C_n\,\alpha^n$ et en faisant en suite la somme des relations obtenues en donnant à n les valeurs $0, 1, 2, \dots,$ ad inf., on voit facilement que toute fonction de la forme (3) satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+1)\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0\,. \tag{5}$$

Ordonons la série (3) suivant les puissances de x

$$z(\alpha\,,x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,\varphi_n(\alpha)\,. \tag{6}$$

Entre les fonctions $\varphi_n(\alpha)$ on doit avoir la relation

$$n^2\,\varphi_n(\alpha) + (n-1)\,\varphi_{n-1}(\alpha) - \alpha\,\varphi'_{n-1}(\alpha) = 0\,,$$

qu'on obtient en remplaçant dans l'équation (5) z par la série (6).

En prenant pour $\varphi_0(\alpha)$ une fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$, cette relation nous montre sans difficulté que l'on a

$$\varphi_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{(n\,!)^2}\,\varphi^{(n)}(\alpha)\,,$$

en désignant par $\varphi^{(n)}(\alpha)$ la dérivée d'ordre n par rapport à α de $\varphi(\alpha)$. Le développement (6) deviendra donc

$$z(\alpha\,,x) = \varphi(\alpha) + \frac{\alpha x}{1^2}\,\varphi'(\alpha) + \dots + \frac{\alpha^n x^n}{(n\,!)^2}\,\varphi^{(n)}(\alpha) + \dots \tag{7}$$

où $\varphi(\alpha)$ représente une série entière en α. On a ainsi une expression de la fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$, qui pour $x=0$ se réduit à une série entière en α, donnée à priori.

En faisant dans (7) $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{1-\alpha}$ on retrouve la fonction génératrice (2).

Si l'on prend

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \frac{f(u)}{u-\alpha}\,du\,,$$

$f(u)$ étant une fonction arbitraire et α en dehors de l'intervalle (a, b), on trouve

$$z(\alpha, x) = \int_a^b e^{\frac{\alpha x}{u-\alpha}} \frac{f(u)}{u-\alpha} du. \tag{8}$$

De même, en supposant $\varphi(\alpha)$ holomorphe à l'intérieur du contour C, on a, par la formule de Cauchy,

$$z(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{\alpha x}{u-\alpha}} \frac{\varphi(u)}{u-\alpha} du, \tag{9}$$

α étant à l'intérieur du contour C.

Remarque. — Si l'on fait dans (7) $\varphi(\alpha) = \alpha^n$, alors $z(\alpha, x)$ se réduit à $\alpha^n P_n(x)$. Par suite, de (9), la représentation par intégrale

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\frac{x}{z-1}} \frac{z^n}{z-1} dz,$$

Γ étant un contour ayant le point 1 à son intérieur.

2. Considérons l'intégrale

$$y = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{P_n(u)}{x-u} du \qquad x > 0, \tag{10}$$

qui est analogue à l'intégrale de F. Neumann pour les fonctions sphériques de seconde espèce. Il est facile de voir que cette intégrale est aussi une solution de l'équation différentielle (1). En effet, si nous remplaçons dans l'intégrale (10) $P_n(u)$ par sa valeur tirée de la relation (4), donc par

$$\frac{1}{n}\left[\frac{du\, P'_n(u)}{du} + u\, P'_n(u)\right],$$

on obtient, après deux intégrations par parties,

$$ny = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{x - u(u-x-1)}{(x-u)^3} P_n(u)\, du.$$

De (10), par différentiations, on a

$$\frac{dy}{dx} = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{u-x-1}{(x-u)^2} P_n(u)\, du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{-\infty}^0 e^{u-x} \frac{(u-x-1)^2+1}{(x-u)^3} P_n(u)\, du.$$

Avec ces valeurs de ny, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ on voit immédiatement que l'intégrale (10) est une solution de l'équation (1).

Ceci établi, désignons par $Q_n(x)$ l'intégrale (10). On montre de même que précédemment qu'une somme de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n C_n Q_n(x),$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles (5). Il en résulte que $z(\alpha, x)$ étant une fonction génératrice de la forme (3), et par suite une solution de l'équation (5), l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} e^{u-x} \frac{z(\alpha, u)}{x-u} du,$$

est aussi une solution de la même équation aux dérivées partielles.

Meccanica celeste. — *Sui satelliti retrogradi.* Nota I di P. BURGATTI, presentata dal Corrispondente G. ARMELLINI.

L'esistenza dei satelliti a moto retrogrado è un fenomono molto interessante, che cagiona difficoltà assai gravi nelle teorie cosmogcniche. Singolare principalmente è la circostanza che essi sono i più lontani dai rispettivi pianeti. Senso del moto e distanza sembrano perciò due caratteri intimamente collegati, e tali da far quasi ritenere che i satelliti che li posseggono abbiano una origine diversa di quelli a moto diretto; i quali, da Kant e da Laplace in poi, sono stati considerati parenti più o meno stretti dei pianeti. Cotesta opinione, espressa anche da autorevoli astronomi corrisponde a verità? Non credo possibile una risposta definitiva allo stato attuale delle nostre conoscenze, e ritengo che non potrà essere data dalla pura meccanica. Nondimeno la meccanica è in grado di chiarire alcune differenze essenziali fra le due classi di satelliti e di offrire qualche elemento per orientarsi in mezzo all'oscurità del grave problema. Questa Nota contiene alcune considerazioni che mirano al fine suddetto. Sono state dedotte, riducendo opportunamente il problema al suo maggior grado di semplicità, per modo che restassero in evidenza le sole cause di differenziazione delle due classi di satelliti. L'importante è che questo appunto si può fare in parecchi dei casi che offre la natura.

Poniamoci nel caso del problema ristretto dei tre corpi. L'orbita del satellite è nel piano dell'orbita planetaria, e la massa del satellite T è ab-