ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Avec ces valeurs de ny, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ on voit immédiatement que l'intégrale (10) est une solution de l'équation (1).

Ceci établi, désignons par $Q_n(x)$ l'intégrale (10). On montre de même que précédemment qu'une somme de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n C_n Q_n(x),$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles (5). Il en résulte que $z(\alpha, x)$ étant une fonction génératrice de la forme (3), et par suite une solution de l'équation (5), l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} e^{u-x} \frac{z(\alpha, u)}{x-u} du,$$

est aussi une solution de la même équation aux dérivées partielles.

Meccanica celeste. — *Sui satelliti retrogradi.* Nota I di P. Burgatti, presentata dal Corrispondente G. Armellini.

L'esistenza dei satelliti a moto retrogrado è un fenomono molto interessante, che cagiona difficoltà assai gravi nelle teorie cosmogeniche. Singolare principalmente è la circostanza che essi sono i più lontani dai rispettivi pianeti. Senso del moto e distanza sembrano perciò due caratteri intimamente collegati, e tali da far quasi ritenere che i satelliti che li posseggono abbiano una origine diversa di quelli a moto diretto; i quali, da Kant e da Laplace in poi, sono stati considerati parenti più o meno stretti dei pianeti. Cotesta opinione, espressa anche da autorevoli astronomi corrisponde a verità? Non credo possibile una risposta definitiva allo stato attuale delle nostre conoscenze, e ritengo che non potrà essere data dalla pura meccanica. Nondimeno la meccanica è in grado di chiarire alcune differenze essenziali fra le due classi di satelliti e di offrire qualche elemento per orientarsi in mezzo all'oscurità del grave problema. Questa Nota contiene alcune considerazioni che mirano al fine suddetto. Sono state dedotte, riducendo opportunamente il problema al suo maggior grado di semplicità, per modo che restassero in evidenza le sole cause di differenziazione delle due classi di satelliti. L'importante è che questo appunto si può fare in parecchi dei casi che offre la natura.

Poniamoci nel caso del problema ristretto dei tre corpi. L'orbita del satellite è nel piano dell'orbita planetaria, e la massa del satellite T è abbastanza piccola per non alterare sensibilmente il moto del pianeta P, che gira intorno al baricentro O Sole-pianeta uniformemente e circolarmente. Si riferisce il moto di T agli assi rotanti $OP \equiv Ox$ e Oy perpendicolare a Ox. Ma si possono pensare gli assi come fissi, purchè alle forze attrattive agenti su T si aggiungano la forza centrifuga e la forza di Coriolis cambiata di senso. Si vede chiaramente che quest'ultima forza è la sola che vari (in direzione) passando da un satellite diretto a un satellite retrogrado: le altre permetterebbero al satellite di descrivere un'orbita nei due sensi. *Essa è rivolta verso il centro di curvatura nei moti retrogradi, nel senso opposto nei moti diretti*; *ed è perciò la cagione del diverso comportamento delle due classi di satelliti.*

Rilevato questo, si è spinti naturalmente a vedere se fosse consentito di trascurare due delle altre forze: la forza attrattiva del Sole e la forza centrifuga.

Siano M, m, μ le masse di S, P, T; e indichiamo le varie distanze ponendo $TP = \varrho$, $TO = r$, $TS = \varrho_1$. Vogliamo supporre che O sia abbastanza vicino a S, e ϱ abbastanza piccola rispetto a $SP = a$, perchè possa ritenersi sensibilmente TO sempre coincidente con TS. Questa ipotesi è accettabile in parecchi dei casi che offre la natura. Ne risulta che la forza attrattiva di S su T e la forza centrifuga (diretta come OT) acquistano la espressione

$$f_s = \frac{KM\mu}{r^2} \qquad f_c = \mu\omega^2 r,$$

essendo ω la velocità angolare del pianeta intorno al Sole, e avendosi per cose note

$$\omega^2 = \frac{K(M+m)}{a^3}. \qquad (a = SP)$$

Queste due forze hanno ugual direzione e verso opposto, perciò i loro effetti si sottraggono costantemente: ossia, è la loro differenza che entra in giuoco.

Essendo nostro intendimento di considerare le orbite quasi circolari, supponiamo addirittura ϱ costante e $\varrho : a = c$ abbastanza piccolo, talchè sia lecito trascurare c^2, c^3 ecc. Scriviamo i valori di f_s e f_c nella forma:

$$f_s = \frac{KM\mu}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \qquad f_c = \frac{K(M+m)}{a^2}\mu \cdot \frac{r}{a};$$

poi cerchiamo i loro valori massimi e minimi. Essendo in corrispondenza $r = a \pm \varrho$, si trova

$$f_s = \frac{KM\mu}{a^2}(1 \pm 2c) \quad , \quad f_c = \frac{K(M+m)}{a^2}\mu(1 \pm c).$$

Perciò, quando T è in opposizione, si ha

$$f_s - f_c = -\frac{KN\mu}{a^2} \cdot 3c - \frac{KM\mu}{a^2}(1+c);$$

e quando è in congiunzione

$$f_s - f_c = \frac{KM\mu}{a^2}\, 3c - \frac{KM\mu}{a^2}(1-c).$$

Questi sono i limiti d'intensità fra cui varia la forza $f_s - f_c$ [1]. Occorre farsi un'idea della grandezza di c, in alcuni dei casi che offre la natura. Si trova, per esempio,

$c = 1:5000$	circa	per il	V	Sat.	di	Giove;
$c = 1:100$	„	„ „	VI	„	„	„
$c = 3:100$	„	„	l'VIII	„	„	„
$c = 3:200$	„	„	Febo	„	„	Saturno
$c = 1:5000$	„	„	Mima	„	„	„
$c = 1:4460$	„	„	il IV di Urano			
$c = 1:12000$	„	„ „	Sat. di Nettuno.			

Questo basta per mostrare che in parecchi casi la forza $\frac{KM\mu}{a^2} \cdot 3\,c$ è una piccola frazione, e talvolta anche piccolissima, dell'attrazione esercitata dal Sole sul satellite situato alla distanza del pianeta; e che $Km\mu(1 \pm c) : a^2$ è pur essa assai piccola, essendo paragonabile alla forza con cui il pianeta atrirerebbe il satellite, se questo fosse situato da quello ad una distanza uguale a quella del Sole. È lecito dunque in certi casi e per certi fini ritenere $f_s - f_c$ trascurabile rispetto all'attrazione del pianeta.

Al contrario, la forza di Coriolis è bene spesso considerevole. Si ha

$$2\mu\omega v = 2\mu \frac{K(M+m)}{a^2} \frac{\omega_1}{\omega} \frac{\varrho}{a} = \frac{K\mu(M+m)}{a^2} 2c \cdot \frac{T}{T_1},$$

essendo T e T_1 i periodi di rivoluzione del pianeta e del satellite. Ora $T : T_1$ è in massima piuttosto grande; per esempio, 19,5. 2358 10.000, per alcuni dei satelliti indicati di sopra; è dunque vero l'asserto.

Dalle cose dette segue chiaramente che pei fini qui dichiarati possiamo ridurre il problema a quello del moto in un piano d'un punto materiale sollecitato dalla forza newtoniana emanante da un centro fisso e dall'accennata forza di *Coriolis*; problema relativamente facile, analogo a quello del moto d'un elettrone intorno ad un centro atomico e in un campo magnetico costante.

(1) Vicino alle quadrature è addirittura nulla.

Per esso valgono gl'integrali dell'energia e delle aree rispetto a certi assi; dai quali, passando alle coordinate polari, si può ricavare una relazione del tipo

$$\frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{f(\varrho)}\,,$$

dove l'equazione $f(\varrho) = 0$, del 4^o grado, ha sempre due radici reali. Ciò dimostra che ogni traiettoria si sviluppa entro una corona circolare. Se le radici sono molto vicine, l'orbita sarà a spire quasi circolari. I caratteri differenziali delle orbite dirette e retrograde di questo tipo coincideranno quasi totalmente con quelle spettanti alle orbite esattamente circolari.

Conviene dunque studiare anzitutto quest'ultima. Sarà fatto in un'altra Nota.

Matematica. — *Sui sistemi* E *nel calcolo differenziale assoluto.* Nota di JOSEPH LIPKA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel cap. I, § 3, della loro esposizione fondamentale dei metodi del calcolo differenziale assoluto [1], i sigg. Ricci e Levi-Civita hanno studiato certi sistemi covarianti o controvarianti, chiamati sistemi E, i quali hanno proprietà molto notevoli e sono spesso utili nel calcolo. Lo scopo di questa Nota è di dimostrare un'altra interessante proprietà di questi sistemi, esprimendo le loro relazioni con certi determinanti elementari, ed indicando altresì un'applicazione semplice di questo risultato.

Si definisce un sistema E nella maniera seguente: Sia a il determinante dei coefficienti della forma fondamentale

$$(1) \qquad \varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

Allora, si chiama E il sistema covariante di ordine n, i cui elementi $\varepsilon_{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ sono uguali a *zero*, se gl'indici $r_1, r_2, \ldots, r_n$ non sono tutti differenti, e uguali a $\sqrt{a}$ o $-\sqrt{a}$, gl'indici essendo tutti differenti, secondo che la classe della permutazione $(r_1, r_2 \ldots, r_n)$ è pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \ldots, n)$.

Si chiama *sistema controvariante* E il sistema reciproco definito, al solito da

$$(2) \qquad \varepsilon^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1, s_2, \ldots, s_n} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_n s_n)}\, \varepsilon_{s_1, s_2, \ldots, s_n}\,,$$

[1] G. Ricci et T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* [Mathematische Annalen, Bd. LIV (1900), pp. 125-201].