ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Moltiplicando per a_{kl} e sommando rispetto a k, si ha

$$\sum_1^n{}_j\, b_{ij}\left(\sum_1^n{}_k\, a^{(kj)}\, a_{kl}\right) = (n-1)\,!\sum_1^n{}_k\, \delta_{ik}\, a_{kl}\,,$$

e da (4),

$$b_{il} = (n-1)\,!\, a_{il}\,.$$

Perciò,

$$(8)\qquad \sum_1^n{}_{r_1 \ldots r_{n-1}\, s_1 \ldots s_{n-1}}\; \varepsilon_{r_1 \ldots r_{n-1}\, i}\; \varepsilon_{s_1 \ldots s_{n-1}\, j}\; a^{(r_1 s_1)}\, a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_{n-1} s_{n-1})} = (n-1)\,!\, a_{ij}\,.$$

Analogamente, si ricava la relazione reciproca

$$(9)\qquad \sum_1^n{}_{r_1 \ldots r_{n-1}\, s_1 \ldots s_{n-1}}\; \varepsilon^{(r_1 \ldots r_{n-1}\, i)}\, \varepsilon^{s_1 \ldots s_{n-1}\, j)}\; a_{r_1 s_1}\, a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_{n-1} s_{n-1}} = (n-1)\,!\, a^{(ij)}\,.$$

Matematica. — *Sopra una equazione funzionale.* Nota V di PIA NALLI, presentata dal Corrisp. G. BAGNERA.

7. Ora dobbiamo far vedere come si calcolano le costanti h.

Definiamo le funzioni $\mathrm{N}_n(x\,,s)$, $\mathrm{P}_n(x\,,s)$, $q_n(x)$. Esse sono state definite per $n=1$ ed $n=2$; porremo in generale

$$\mathrm{N}_n(x\,,s) = \mathrm{N}_{n-1}(x\,,x) + \int_s^x \frac{\partial \mathrm{N}_{n-1}(x\,,t)}{\partial x}\,dt\,,$$

$$\mathrm{P}_n(x\,,s) = \alpha^{n-1}\,g'(x) + \alpha\,\mathrm{P}_{n-1}(x\,,\alpha x) + \int_s^{\alpha x} \frac{\partial \mathrm{P}_{n-1}(x\,,t)}{\partial x}\,dt\,,$$

$$q_n(x) = \mathrm{P}_n(x\,,0) + \mathrm{N}_n(x\,,0)\,.$$

In altre parole: $\mathrm{N}_n(x\,,s)$, $\mathrm{P}_n(x\,,s)$, $q_n(x)$ sono formate per mezzo di $\mathrm{N}_{n-1}(x\,,s)$, $\mathrm{P}_{n-1}(x\,,s)$, $\alpha^{n-1}\,g(x)$, come $\mathrm{N}_1(x\,,s)$, $\mathrm{P}_1(x\,,s)$, $q_1(x)$ lo sono per mezzo di $\mathrm{N}(x\,,s)$, $\mathrm{P}(x\,,s)$, $g(x)$.

La (4) ci dà

$$(15)\quad u^{(n)}(x) = \lambda\left[\alpha^n\,g(x)\,u^{(n)}(\alpha x) + \int_0^x \mathrm{N}_n(x,s)\,u^{(n)}(s)\,ds + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}_n(x,s)\,u^{(n)}(s)\,ds + \sum_{r=0}^{n-1} u^{(r)}(0)\,q_{r+1}^{(n-r-1)}(x)\right] + f^{(n)}(x)\,.$$

Se denotiamo con $u_{n,i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ la soluzione dell'equazione

$$u_{n,i}(x) = \lambda\left[\alpha^n g(x)\, u_{n,i}(\alpha x) + \int_0^x \mathrm{N}_n(x, s)\, u_{n,i}(s)\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}_n(x, s)\, u_{n,i}(s)\, ds\right] + l_{n,i}(x),$$

dove poniamo

$$l_{n,i}(x) = \begin{cases} f^{(n)}(x) & i = 1 \\ q_{i-1}^{(n-i+1)}(x) & i \geq 2, \end{cases}$$

la (15) ci dà

$$u^{(n)}(x) = u_{n,1}(x) + \lambda \sum_{r=0}^{n-1} u^{(r)}(0)\, u_{n,r+2}(x),$$

e di qui

$$(16) \quad u(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{\int_0^x (x-\xi)^{n-1} u_{n,1}(\xi)\, d\xi + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=0}^{n-1} u^{(r)}(0)\left[\frac{x^r}{r!} + \lambda \int_0^x (x-\xi)^{n-1} u_{n,r+2}(\xi)\, d\xi\right]\right\}.$$

Già abbiamo calcolati $u(0)$ ed $u'(0)$; dopo avere calcolati $u(0)$, $u'(0)$, ... $u^{(n-2)}(0)$, possiamo calcolare $u^{(n-1)}(0)$ dalla (15) mettendo $n-1$ al posto di n, e facendo poi $x = 0$ Si trova così

$$u^{(n-1)}(0) = \frac{f^{(n-1)}(0) + \lambda \sum_{r=0}^{n-2} u^{(r)}(0)\, q_{r+1}^{(n-r-2)}(0)}{1 - \lambda \alpha^{n-1} g(0)},$$

e perciò

$$u^{(n-1)}(0) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{P}_{n-1,r}(\lambda)\, f^{(r)}(0)}{\prod_{r=0}^{n-1} [1 - \lambda \alpha^r g(0)]},$$

dove le $\mathrm{P}_{n-1,r}(\lambda)$ sono polinomî in λ di grado $\leq n-1$ che si calcolano con formole di ricorrenza, facili a stabilirsi. In particolare si ha

$$\mathrm{P}_{n-1,n-1}(\lambda) = \prod_{r=0}^{n-2} [1 - \lambda \alpha^r g(0)].$$

I coefficienti dei polinomî $\mathrm{P}_{n-1}(\lambda)$ sono polinomî in $g(0)$ e $q_i^{(r)}(0)$ con $i + r \leq n-1$.

Dalla (16) ricaviamo

$$\varphi_{n-1}(x) = x^{n-1} + (n-1)!\, \lambda_{n-1} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} u_{n,n+1}(\xi)|_{n-1}\, d\xi$$

intendendo con $u_{n,n+1}(\xi)|_{n-1}$ che in $u_{n,n+1}(\xi)$, la quale dipende anche da λ, bisogna porre $\lambda = \lambda_{n-1}$.

Dalla (16) ricaviamo ancora

$$h_{n-1} = \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{P}_{n-1,r}(\lambda_{n-1})\, f^{(r)}(0)}{\prod_{r=1}^{n-1} (\alpha^r - 1)}$$

La condizione

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{P}_{n-1,r}(\lambda_{n-1})\, f^{(r)}(0) = 0\,,$$

imposta alla $f(x)$, è necessaria e sufficiente perchè la (4) ammetta soluzione finita per $\lambda = \lambda_{n-1}$.

Soddisfatta tale condizione, la più generale soluzione della (4) si ottiene aggiungendo ad una particolare soluzione, per esempio alla seguente

$$\frac{1}{(n-1)!}\left\{\int_0^x (x-\xi)^{n-1}\left[u_{n,1}(\xi) + \lambda \sum_{r=0}^{n-1} u^{(r)}(0)\, u_{n,r+2}(\xi)\right] d\xi + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u^{(r)}(0)}{r!}\, x^r \right\}\Bigg|_{n-1}\,,$$

$c\varphi_{n-1}(x)$, con c costante arbitraria.

8. Abbiamo così trovato che la soluzione della (4), dotata di derivate di qualunque ordine, si può mettere sotto la forma

$$u(x) = \frac{v(x\,;\lambda)}{\mathrm{D}(\lambda)}\,,$$

dove $\mathrm{D}(\lambda)$ è la seguente funzione intera di λ

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 - \lambda \alpha^n g(0)]$$

e $v(x\,;\lambda)$ per ogni x in $(0\,,a)$ è una funzione intera di λ di cui diamo qui l'espressione.

$\mathrm{D}(\lambda)$, soddisfacendo all'equazione funzionale

$$\mathrm{D}(\lambda) = [1 - \lambda\, g(0)]\, \mathrm{D}(\alpha\lambda)$$

e prendendo il valore 1 per $\lambda = 0$, si sviluppa nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)\, \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}\, \lambda^n\,;$$

$v(x\,;\lambda)$ soddisfa all'equazione

$$v(x\,;\lambda) = \lambda\left[g(x)\, v(\alpha x\,;\lambda) + \int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\, v(s\,;\lambda)\, ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\alpha x} \mathrm{P}(x\,,s)\, v(s\,;\lambda)\, ds\right] + \mathrm{D}(\lambda)\, f(x)\,;$$

quindi, ponendo

$$v(x\,;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\, v_n(x)\,,$$

le $v_n(x)$ si ottengono con la seguente formola di ricorrenza

$$v_n(x) = \mathrm{S}[v_{n-1}(x)] + \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{g^n(0)}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)} f(x)\,.$$

9. Quanto abbiamo esposto vale nell'ipotesi che sia $g(0) \neq 0$. Se $g(0) = 0$, la soluzione $u(x)$ della (4) è una funzione intera di λ ed è precisamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n(x)$ introdotta al n. 2.

Osserviamo finalmente che quanto abbiamo esposto si estende alla equazione

$$u(x) = \lambda\left[g(x)\, u(\varphi(x)) + \int_0^x \mathrm{N}(x\,,s)\, u(s)\, ds + \int_0^{\varphi(x)} \mathrm{P}(x\,,s)\, u(s)\, ds \right] + f(x)$$

facendo opportune ipotesi sulla funzione $\varphi(x)$.

Fisica terrestre. — *La temperatura delle lave incandescenti dell'Etna.* Nota di Giovanni Platania, presentata dal Corrispondente A. Bemporad.

In una Nota precedente su questo argomento [1] diedi conto dei risultati che ottenni adoperando un pirometro a radiazione di Féry per determinare la temperatura superficiale di un braccio di lava fluente, sul finire dell'eruzione etnea del 1911.

In un'altra escursione al cratere centrale dello stesso vulcano, nel 1918, ebbi l'occasione di misurare la temperatura nell'interno di una piccola colata di lava incandescente, per mezzo di un pirometro termo-elettrico che potei immergere nella colata medesima.

Per l'interesse presentato da questo genere di misure per lo studio fisico dei vulcani, dò conto in questa Nota delle circostanze in cui potei compiere questa determinazione e del risultato ottenuto.

La mattina del 1° luglio 1918 — in compagnia dei miei allievi signori Amato Francesco e Galici Pietro, licenziati macchinisti navali dell'Istituto Nautico di Catania e del sig. Alfio Barbagallo, custode dell'Osservatorio Etneo — dopo aver superata la scarpata orientale del cono centrale, attraversammo il grande ammasso di focacce scoriacee, che formò la pseudo-colata del 24 giugno 1917, avviandoci verso l'apparecchio eruttivo sorto nella grande voragine del 1911. a N del cratere centrale. Non potendo raggiungere i crateri attivi, per la loro cresciuta attività esplosiva e per il vento

[1] Rend. R. Acc. Lincei (5) XXI, 1912.