ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1922.

Presidenza del Socio anziano R. LANCIANI.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sopra i moti ellittici perturbati.* Nota del Socio E. ALMANSI.

1. Un punto materiale P, di massa m, si muova sollecitato dall'attrazione newtoniana dovuta ad una massa M, e da una forza perturbatrice.

Le formule a cui pervengo in questa Nota esprimono, in modo assai semplice, come variano da istante a istante, per effetto della forza perturbatrice, la forma dell'orbita istantanea, che suppongo ellittica, e la sua posizione rispetto ad una terna di assi ortogonali, d'orientazione fissa, colla origine in M.

Diciamo π, in un istante qualunque, il piano dell'orbita, ossia il piano che contiene il raggio vettore MP, ed è tangente alla traiettoria di P. Il passaggio del piano π dalla posizione che esso occupa al tempo t, a quella che occupa al tempo $t+dt$, si può immaginare che avvenga mediante una rotazione intorno alla retta MP. Denoti $d\sigma$ l'angolo di cui ruota π nel tempo dt.

Sia poi g una retta passante per M, situata sul piano π, *e fissa rispetto a questo piano*; ψ l'angolo, misurato nel verso in cui avviene il movimento di P, che l'asse maggiore della ellissi, orbita istantanea di P al tempo t, forma con g; p il parametro, e l'eccentricità della ellissi.

Le quattro quantità $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ si esprimono molto semplicemente facendo intervenire una forza che chiamo *forza perturbatrice ridotta* (e indico con f. p. r.): forza definita nel modo seguente.

Consideriamo una terna $M(r, r', r'')$ di rette ortogonali, congruente colla terna $M(x, y, z)$ degli assi coordinati. La retta r abbia la direzione e il verso MP. La retta r' sia normale alla r, sul piano dell'orbita, e formi un angolo acuto (o nullo) colla velocità di P. La retta r'' sarà normale al piano dell'orbita. Denotino S, T, W le proiezioni della forza perturbatrice (unitaria) sulle tre rette r, r', r''. La f. p. r. abbia sulla stessa retta le proiezioni

$$S_1 = S - T \operatorname{tag} \zeta \quad , \quad T_1 = 2T \quad , \quad W_1 = W ,$$

ζ essendo l'angolo che la velocità di P forma colla retta r'.

Siano poi: U_1 e V_1 le proiezioni della f. p. r. sull'asse maggiore e sull'asse minore dell'orbita istantanea; r la lunghezza del segmento MP; μ il prodotto della costante dell'attrazione per $M + m$ (supposta mobile anche la massa M). Si trova

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}}\, r\, W_1 \,, \; e\, \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{\frac{p}{\mu}}\, U_1 \,, \\ \frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, r\, T_1 \,, \quad \frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, V_1 \,. \end{aligned} \right.$$

Insieme alle precedenti, è da considerare la formula

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$$

in cui $d\theta$ denota l'angolo descritto dal raggio vettore MP, sul piano π, nel tempo dt.

Dedurrò le formule (1) direttamente dalle equazioni del movimento di m. Esse potrebbero dedursi da note formule di Gauss [1].

2. Diciamo x, y, z le coordinate del punto P; α, β, γ i coseni direttori della retta r. I coseni direttori della r' saranno:

$$(2) \qquad \alpha' = \frac{d\alpha}{d\theta} \,, \; \beta' = \frac{d\beta}{d\theta} \,, \; \gamma' = \frac{d\gamma}{d\theta} \; [2].$$

Dalle formule $x = r\alpha$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\alpha + r\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\alpha + r\dfrac{d\theta}{dt}\alpha'$, ecc., si ricava

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}(\beta\gamma' - \gamma\beta') ;$$

(1) V. Tisserand, *Mécanique céleste*, vol. I, cap. XXVII.

(2) Si può riconoscere osservando che, abbassata da P la perpendicolare PQ sul raggio vettore MP′ inf. vicino ad MP, il segmento PQ, che al limite giace sulla retta r', avrà (a meno d'inf. d'ord. sup.) la grandezza $r\,d\theta$, e le proiezioni, differenze fra le proiezioni dei segmenti PP′ e QP′, $dx - dr\alpha = rd\alpha$, ecc.; onde i coseni della r' saranno $\dfrac{rd\alpha}{rd\theta} = \dfrac{d\alpha}{d\theta}$, ecc.

quindi, ponendo

$$q = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

e indicando con $\alpha'', \beta'', \gamma''$ i coseni direttori dalla r'':

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = q\alpha'', \text{ ecc.}$$

D'altra parte, dalle equazioni del movimento del punto m rispetto alla terna $M(x, y, z)$, che scriveremo $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, ecc., si ricava

$$\frac{d}{dt}\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) = yZ - zY = r(\beta Z - \gamma Y).$$

Sarà per conseguenza

(3)
$$\frac{dq}{dt}\alpha'' + q \frac{d\alpha''}{dt} = r(\beta Z - \gamma Y).$$

Moltiplicando questa equazione, e le due analoghe, per $\alpha'', \beta'', \gamma''$, e sommando, si ottiene

$$\frac{dq}{dt} = r\,T_0,$$

ove $T_0 = \alpha''(\beta Z - \gamma Y) + \cdots = (\beta''\gamma - \gamma''\beta)\,X + \cdots = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z$. Dunque T_0 è la proiezione della forza (X, Y, Z), che indicheremo con F, sopra la direzione r'.

L'equazione (3), sostituendo $r T_0$ a $\frac{dq}{dt}$, potremo scriverla

$$\frac{d\alpha''}{dt} = \frac{r}{q}(\beta Z - \gamma Y - \alpha'' T_0).$$

Ma se W_0 è la proiezione della forza F sulla direzione r'', si ha

$$\beta Z - \gamma Y - \alpha'' T_0 = -\alpha' W_0, \text{ ecc.},$$

(come si riconosce moltiplicando successivamente queste ultime equazioni per i coseni di r, r', r'', e sommando). D'altronde la forza F ha sulle direzioni r' ed r'', normali al raggio vettore, le stesse proiezioni T e W della forza perturbatrice. Pertanto avremo:

(4)
$$\frac{dq}{dt} = r\,T;$$

(5)
$$\frac{d\alpha''}{dt} = -\frac{r}{q} W\alpha', \quad \frac{d\beta''}{dt} = -\frac{r}{q} W\beta', \quad \frac{d\gamma''}{dt} = -\frac{r}{q} W\gamma'.$$

3. Indichiamo con E l'ellissi orbita istantanea del punto m al tempo t, ossia l'orbita che m descriverebbe negl'istanti successivi a t, se nello

istante t si annullasse la forza perturbatrice; P_1 la posizione che in tale caso occuperebbe il punto m in un istante qualunque; c il valore che avrebbe la costante delle aree.

Al tempo t i due punti P e P_1 hanno la stessa posizione e la stessa velocità; quindi anche la quantità $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ avrà lo stesso valore per ambedue i punti, sarà cioè $q = c$. Ma $c = \sqrt{\mu p}$; dunque $q = \sqrt{\mu p}$, da cui $p = \frac{q^2}{\mu}$. Considerando p, in ogni istante, come il parametro della ellissi relativa a quell'istante, questa formula varrà per tutti i valori di t. Derivandola rispetto a t, e tenendo conto della (4), si ha $\frac{dp}{dt} = \frac{2q}{\mu} r\mathrm{T}$. Ma $2\mathrm{T} = \mathrm{T}_1$ (n. 1), $q = \sqrt{\mu p}$: donde la terza delle (1).

La prima delle (1) si ottiene dalle (5). Se infatti ω è la velocità angolare con cui il piano π, al tempo t, ruota intorno ad r, si avrà per le formule del Poisson, $\frac{d\alpha''}{dt} = -\omega\alpha'$, ecc.; quindi, per le (5), ω, ossia $\frac{d\sigma}{dt}$, sarà uguale ad $\frac{r}{q}\mathrm{W} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r\mathrm{W}_1$.

4. Abbiamo indicato con $d\theta$ l'angolo descritto dal raggio vettore MP (sul piano π) nel tempo dt. Con θ potremo denotare l'angolo che il raggio vettore, al tempo t, forma colla retta g fissa sul piano π (n. 1).

Diciamo θ_1 l'angolo che il raggio vettore MP_1 forma colla retta g_1 sulla quale è disteso l'asse maggiore della ellissi E; ϱ_1 l'inversa del segmento MP_1. L'equazione della ellissi sarà

$$e \cos\theta_1 = p\varrho_1 - 1 .$$

In ogni punto di E sarà anche verificata l'equazione

$$e \operatorname{sen}\theta_1 = -p\frac{d\varrho_1}{d\theta_1},$$

ottenuta derivando la precedente rispetto a θ_1. In particolare le due equazioni varranno nel punto $P_1 \equiv P$ che il mobile occupa al tempo t. Ma quivi $\varrho_1 = \varrho = \frac{1}{r}$, $\frac{d\varrho_1}{d\theta_1} = \frac{d\varrho}{d\theta}$; e inoltre $\theta_1 = \theta - \psi$ (ψ essendo l'angolo che g_1 forma con g: n. 1). Sarà dunque al tempo t:

$$(6) \qquad \begin{cases} e\cos(\theta - \psi) = p\varrho - 1 , \\ e \operatorname{sen}(\theta - \psi) = -p\frac{d\varrho}{d\theta} . \end{cases}$$

Se poi consideriamo p, e, ψ come variabili, in quanto varia con t la ellissi E, queste due equazioni sussisteranno in ogni istante.

Deriviamo le due equazioni rispetto a t, ed eseguita la derivazione, torniamo a scrivere θ_1 in luogo di $\theta - \psi$, denotando così con θ_1 l'angolo che in un istante qualunque il raggio vettore MP forma colla retta g_1 sulla quale è disteso l'asse maggiore della ellissi relativa a quell'istante. Avremo

$$\frac{de}{dt}\cos\theta_1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta_1\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{dp}{dt}\varrho + p\frac{d\varrho}{dt},$$

$$\frac{de}{dt}\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + e\cos\theta_1\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\right) = -\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} - p\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right).$$

Portiamo i termini che contengono $\frac{d\theta}{dt}$ nei secondi membri; nei quali poi, in luogo di $\frac{d\varrho}{dt}$ e $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)$, scriveremo $\frac{d\varrho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ e $\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$. E denotiamo con A′ ed A ciò che rimane nei primi membri, ossia poniamo

$$(7)\qquad \mathrm{A}' = \frac{de}{dt}\cos\theta_1 + e\frac{d\psi}{dt}\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \quad , \quad \mathrm{A} = \frac{de}{dt}\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - e\frac{d\psi}{dt}\cos\theta_1 .$$

Si otterrà

$$\mathrm{A}' = \frac{dp}{dt}\varrho + \left(e\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + p\frac{d\varrho}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

$$\mathrm{A} = -\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} - \left(e\cos\theta_1 + p\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}\right)\frac{d\theta}{dt};$$

e sostituendo nei secondi membri, ad $e\,\mathrm{sen}\,\theta_1$ ed $e\cos\theta_1$, i valori $-p\frac{d\varrho}{d\theta}$ e $p\varrho - 1$ forniti dalle (6) in cui si ponga $\theta - \psi = \theta_1$

$$(8)\qquad \mathrm{A}' = \frac{dp}{dt}\varrho \quad , \quad \mathrm{A} = -\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} - \left\{ p\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho\right) - 1 \right\}\frac{d\theta}{dt}.$$

Per le formule (7), $-e\frac{d\psi}{dt}$ e $\frac{de}{dt}$ saranno le proiezioni, sull'asse maggiore e sull'asse minore della ellissi, del vettore di cui le quantità A ed A′, date dalle (8), sono le proiezioni sulle direzioni r ed r'.

Trasformiamo queste ultime equazioni.

5. Diciamo perciò w_r la proiezione della accelerazione di m sul raggio vettore. Si ha

$$w_r = -q^2\varrho^2\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho\right) - \frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta} \qquad \left(q = r^2\frac{d\theta}{d\varrho}\ ,\ \varrho = \frac{1}{r}\right) \text{(1)}.$$

(1) Si ottiene questa espressione di w_r dalla formula $w_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right\}$, osservando che, per le (2), $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \cdots = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, e tenendo poi conto delle formule $\frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{r^2}$, $\frac{1}{r} = \varrho$.

Ma l'accelerazione di m è il vettore F (n. 2); quindi $w_r = -\mu\varrho^2 + S$ (essendo S la proiezione sul raggio vettore della forza pert.). Avremo dunque

$$-q^2\varrho^2\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}+\varrho\right)-\frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}=-\mu\varrho^2+S,$$

donde, posto $q^2=\mu p$ (n. 3),

$$p\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}+\varrho\right)-1=\frac{1}{\mu\varrho^2}\left(S+\frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}\right);$$

quindi, sostituendo nella seconda delle (8), e notando che $\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\theta}{dt}=q$,

$$A=-\frac{dp}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}+\frac{q}{\mu}\left(S+\frac{dq}{dt}\frac{d\varrho}{d\theta}\right).$$

Nella prima delle (8), e in quest'ultima, a $\frac{dp}{dt}$ e $\frac{dq}{dt}$ sostituiamo i valori $\frac{2q}{\mu}rT$, ed rT (n. 3 e 2). Avremo

$$A'=\frac{q}{\mu}2T\quad,\quad A=\frac{q}{\mu}\left(S-rT\frac{d\varrho}{d\theta}\right).$$

Ora $r\frac{d\varrho}{d\theta}=-\frac{dr}{rd\theta}=\operatorname{tag}\zeta$, ($\zeta$ essendo l'angolo che la tangente alla traiettoria di P forma colla direzione r'); $S-T\operatorname{tag}\zeta$ e $2T$ sono le proiezioni della f. p. r. sulle direzioni r ed r'. Avendo presente l'osservazione fatta nel n. 4, in fine, ed osservando che, per la formula $q=\sqrt{\mu p}$, $\frac{q}{\mu}$ è uguale a $\sqrt{\frac{p}{\mu}}$, si ottengono le seconda e la quarta delle formule (1).