

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.



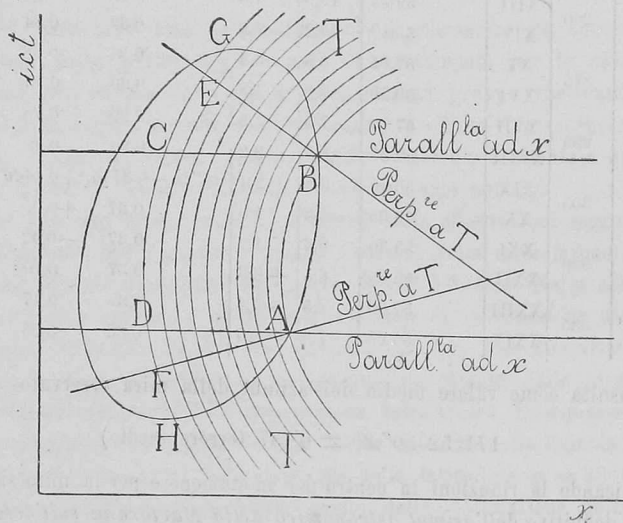
ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

**Relatività.** — *Correzione di una grave discrepanza tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica delle masse elettromagnetiche. Inerzia e peso dell'elettricità.* Nota II di ENRICO FERMI, presentata del Corrisp. G. ARMELLINI.

Per poter applicare il principio di Hamilton dobbiamo sottoporre le nostre variazioni all'ulteriore condizione di annullarsi sul contorno del campo quadridimensionale  $G$  di integrazione. Con tale condizione se applichiamo il sistema di variazione A il campo di integrazione si riduce a ABCD, poichè nei campi BGC, ADH i  $\delta x_i$  si annullano dovendo annullarsi sul contorno del campo, e quindi nei segmenti BG, AH ed aver valore costante per  $t$



costante. Per la stessa ragione, se invece che il sistema di variazioni A adottiamo quello B, il campo di integrazione si riduce ad ABEF. È ora ben evidente che la variazione A è in contraddizione colla teoria della relatività poichè essa non ha carattere invariante nello spazio-tempo; prendendo a base lo spazio arbitrario  $x, y, z$ . La variazione B possiede invece il desiderato carattere invariante prendendo sempre a base lo spazio perpendicolare al tubo, ed è perciò certamente da preferire all'altra.

Indichiamo secondo l'opportunità con  $(t, x, y, z)$  o con  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  le coordinate di tempo e spazio e sia  $F_{ik}$  il campo elettromagnetico.

Il principio di Hamilton, che riassume le leggi meccaniche e quelle di Maxwell-Lorentz ci dice che <sup>(1)</sup>:

La variazione dell'azione complessiva deve essere nulla per ogni variazione conforme ai vincoli e che si annulli sul contorno del campo di integrazione  $G$ . Nel nostro caso l'azione è semplicemente quella delle cariche elettriche, perchè le uniche quantità che facciamo variare sono le  $x_i$ .

Ponendo tale variazione = 0 troviamo l'equazione:

$$(1) \quad \sum_{ik} \int \int de F_{ik} \delta x_i dx_k = 0$$

dove la prima integrazione è fatta sugli elementi di carica  $de$  del sistema, e la seconda lungo quegli archi della linea oraria descritta da  $de$  che sono contenuti nel campo  $G$ . Dobbiamo ora esaminare separatamente le conseguenze dei sistemi di variazioni  $A$  e  $B$ .

*Conseguenze del sistema di variazioni A.* In questo caso il campo di integrazione è  $ABCD$ ; se  $t_1$  e  $t_2$  sono i tempi di  $A$  e  $B$ , osservando che i  $\delta x_i$  dipendono solo dal tempo e che  $\delta t = 0$  si vede che (1) diventa:

$$\sum_{ik} \int_{t_1}^{t_2} dt \delta x_i \int de F_{ik} \frac{dx_k}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), (k = 0, 1, 2, 3).$$

Siccome poi i  $dx_i$  sono funzioni qualunque del tempo ne ricaviamo le tre equazioni:

$$\sum_k \int de F_{ik} \frac{dx_k}{dt} = 0$$

cioè se  $E$  ed  $H$  rappresentano le forze elettrica e magnetica:

$$\int \left\{ E_x + \frac{1}{c} \left( \frac{dy}{dt} H_z - \frac{dz}{dt} H_y \right) \right\} de = 0$$

e le due analoghe.

Se all'istante che si considera la velocità del sistema è nulla nel riferimento  $(t, x, y, z)$  le tre equazioni precedenti si riassumono nell'unica vettoriale:

$$(2) \quad \int E de = 0.$$

Nelle trattazioni ordinarie tale equazione si ammette a priori. L'abbiamo dedotta col principio di Hamilton per mostrare il difetto della sua origine. Osserviamo ora che  $E$  è la somma di una parte  $E^{(i)}$  dovuta al sistema stesso, e di una parte  $E^{(e)}$  dovuta a cause esterne. La (2) diventa perciò:

$$\int E^{(i)} de + \int E^{(e)} de = 0.$$

<sup>(1)</sup> Weyl-Raum, Zeit, Materie, pag. 194 segg. Berlin, Springer; 1921.

D'altra parte sia il calcolo diretto, che la ben nota considerazione del momento elettromagnetico <sup>(1)</sup> mostrano che il primo integrale è  $= -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma$ , essendo  $\Gamma$  l'accelerazione. Il secondo integrale rappresenta invece la forza esterna totale  $F$ . Troviamo così:

$$F = \frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \Gamma,$$

che confrontato con l'equazione fondamentale della dinamica del punto, ci dice che la massa è  $\frac{4}{3} \frac{u}{c^2}$

*Conseguenze del sistema di variazioni B.* In questo caso il campo di integrazione è ABEF. Pensiamolo diviso in infiniti strati infinitesimi, per mezzo di infinite sezioni normali del tubo. Per uno di essi ammettiamo poi che  $(t, x, y, z)$  sia il riferimento di quiete. Per esso sarà allora  $\delta t = 0$ ,  $\delta x, \delta y, \delta z$  costanti arbitrarie:  $dx = dy = dz = 0$  perchè il riferimento è di quiete:  $dt =$  spessore dello strato  $= d\tau(1 - k \times P - 0)$  se  $P = 0$  è il vettore con origine nel punto 0 dove una linea oraria  $L_0$  generica ma fissata, incontra lo strato, e termine in P dove lo strato è incontrato dalla linea oraria descritta da  $de$ , e  $k$  rappresenta il vettore curvatura di  $L_0$  nel punto 0. Il contributo del nostro strato all'integrale (1) diventa con ciò:

$$\int de (F_{10} \delta x + F_{20} \delta y + F_{30} \delta z) (1 - k \times P - 0) d\tau$$

se  $\Gamma$  è l'accelerazione si ha però  $k = -\Gamma : c^2$ ; osserviamo inoltre che nell'integrazione su  $de \delta x, \delta y, \delta z, d\tau$  sono costanti; allora l'integrale precedente diventa:

$$-d\tau \left[ \delta x \int E_x \left( 1 + \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2} \right) de + \delta y \int E_y \left( 1 + \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2} \right) de + \delta z \int E_z \left( 1 + \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2} \right) de \right].$$

Dovendo tale espressione annullarsi per tutti i possibili valori di  $\delta x, \delta y, \delta z$  troviamo tre equazioni che si riassumono nell'unica vettoriale:

$$(3) \quad \int E \left( 1 + \frac{\Gamma \times P - 0}{c^2} \right) de = 0.$$

<sup>(1)</sup> Richardson, loc. cit.

Tale equazione sostituisce (2) e conduce come massa elettromagnetica al valore  $u : c^2$ . Poniamo, infatti, come sopra  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(e)}$  ed osserviamo che si ha ancora  $\int \mathbf{E}^{(i)} de = -\frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma}$ . Troviamo :

$$\int \mathbf{E}^{(e)} de + \int \mathbf{E}^{(e)} \frac{\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{P} - 0}{c^2} de - \frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma} + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{P} - 0}{c^2} de = 0.$$

Di qui segue che  $\mathbf{E}^{(e)}$  è dell'ordine di grandezza <sup>(1)</sup> di  $\mathbf{\Gamma}$ . Se trascuriamo i termini in  $\mathbf{\Gamma}^2$  possiamo sopprimere il secondo integrale; ponendo come sopra  $\mathbf{F} = \int \mathbf{E}^{(e)} de$ , si ha dunque :

$$(4) \quad \mathbf{F} - \frac{4}{3} \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma} + \int \mathbf{E}^{(i)} \frac{\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{P} - 0}{c^2} de = 0.$$

Per calcolare l'ultimo integrale osserviamo che  $\mathbf{E}^{(i)}$  è la somma della forza di Coulomb  $= \int \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}'}{r^3} de'$  (dove  $\mathbf{P}$  è il punto potenziato,  $\mathbf{P}'$  il punto potenziante di carica  $de'$  ed  $r$  la distanza  $\mathbf{PP}'$ ) e di una parte contenente  $\mathbf{\Gamma}$  che darebbe termini in  $\mathbf{\Gamma}^2$ , da trascurarsi. L'integrale in questione diventa dunque :

$$\frac{1}{c^2} \iint \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}'}{r^3} (\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{P} - 0) de de'$$

oppure scambiando  $\mathbf{P}$  con  $\mathbf{P}'$  e prendendo la semisomma dei valori ottenuti

$$\frac{1}{2c^2} \iint \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}'}{r^3} (\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{P} - \mathbf{P}') de de'$$

tale integrale si calcola subito nel caso della simmetria sferica <sup>(2)</sup> e risulta  $= \frac{1}{3} \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma}$ . Sostituendo in (4) troviamo dunque :

$$\mathbf{F} = \frac{u}{c^2} \mathbf{\Gamma}$$

cioè la massa elettromagnetica  $= u \cdot c^2$ .

<sup>(1)</sup> Propriamente il numero di cui si trascurano i quadrati è  $\frac{\Gamma l}{c^2}$ , essendo  $l$  la massima lunghezza che interviene nel problema.

<sup>(2)</sup> Basta perciò prender la media del suo termine generale per tutte le possibili orientazioni del segmento  $\mathbf{PP}'$ , osservando che si ha :

$$\text{media di } (\mathbf{P} - \mathbf{P}') (\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{P} - \mathbf{P}') = \frac{1}{3} r^2 \mathbf{\Gamma}.$$