ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Sulla durata delle oscillazioni di una sfera vibrante radialmente in un fluido.* Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

1. In una Nota [1] pubblicata in questi Rendiconti, ho dimostrato che le vibrazioni semplici di una sfera vibrante radialmente in un fluido perfetto sono caratterizzate dalle equazioni:

$$u'' + \frac{2}{r}u' = \left(\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{2}{r^2}\right)u\,; \qquad 0 \leq r \leq \mathrm{R}$$

$$\varrho a^2 \left[\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{\lambda}{c}\right] u'(1) + \left[2\varrho\frac{a^2-2b^2}{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{\lambda}{c}\right) + \varrho_1\lambda^2\right]u(1) = 0\,, \quad r = \mathrm{R}$$

nelle quali: a, b sono le velocità di propagazione delle onde longitudinali, e trasversali nel vibratore, c è la velocità del suono nel fluido, ϱ è la densità della sfera, ϱ_1 quella del fluido. La parte reale e il coefficiente di i nell'espressione $e^{\lambda t}u$ dànno possibili spostamenti.

Si facciano le posizioni:

$$\mathrm{A} = \frac{\varrho a^2}{\mathrm{R}^2}\,;\ \mathrm{B} = \frac{\varrho a^3}{c\mathrm{R}^2}\,;\ h = 2\frac{a^2-2b^2}{a^2}\,;\ \alpha = \frac{\varrho_1 a^2}{\mathrm{R}^2}\,;\ x = \frac{r}{\mathrm{R}}$$

e si ponga λ in luogo di $\dfrac{\lambda\mathrm{R}}{a}$. Il sistema cui soddisfanno le soluzioni semplici acquista la forma:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{2}{x}u' = \left(\lambda^2 + \dfrac{2}{x^2}\right)u\,, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (\mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda)\,u'(1) + [h(\mathrm{A} + \mathrm{B}\lambda) + \alpha\lambda^2]\,u(1) = 0\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'ultima condizione deriva da ovvie considerazioni di continuità dello spostamento.

Le costanti A, B, h, α soddisfanno alle diseguaglianze:

$$\mathrm{A} > 0 \qquad \mathrm{B} > 0 \qquad \alpha \geq 0 \qquad h \geq -1\,.$$

[1] *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Rendiconti Acc. dei Lincei. Vol, XXI, serie V, 2° semestre, pag. 20 e seguenti.

Metterò questo sistema sotto la forma:

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases}(x^2u')' = (\lambda^2 x^2+2)\,u \quad ; \quad 0\le x\le 1\\ u'(1)+(h+\alpha l)\,u(1)=0\,; \qquad u(0)=0\,; \qquad l=\dfrac{\lambda^2}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\lambda}\,.\end{cases}$$

Se una sfera ancora di raggio R e della stessa sostanza della precedente vibra in un fluido di densità ϱ_0, e poniamo $\alpha_1=\dfrac{\varrho_1 a^2}{\mathrm{R}^2}$, le sue vibrazioni semplici saranno caratterizzate dal nuovo sistema:

$$(\mathrm{III})\quad\begin{cases}(x^2v')' = (\varLambda^2 x^2+2)\,v\\ v'(1)+(h+\alpha_1\mathrm{L})\,v(1)=0\,; \qquad v(0)=0\,; \qquad \mathrm{L}=\dfrac{\varLambda^2}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varLambda}\,.\end{cases}$$

Le soluzioni $(\lambda\,,u)$ del sistema (II) corrispondano biunivocamente alle soluzioni $(\varLambda\,,v)$ del sistema (III) per modo che quando α_1 tende ad α la soluzione $(\varLambda\,,v)$ tenda alla $(\lambda\,,u)$.

Dai sistemi (II) e (III) discende facilmente:

$$(v\,u'-v'\,u)_{x=1}=(\lambda^2-\varLambda^2)\int_0^1 x^2\,uv\,dx\,.$$

Usando poscia delle condizioni ai limiti si deduce ancora:

$$(1)\qquad (\alpha_1\mathrm{L}-\alpha l)\,u(1)\,v(1)=(\lambda^2-\varLambda^2)\int_0^1 x^2\,uv\,dx\,.$$

Ammesso che λ sia funzione derivabile di α, dalla (1), dividendo per $\lambda^2-\varLambda^2$ e passando al limite per $\alpha_1=\alpha$, si ottiene:

$$\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{d\alpha}{d\lambda}\,l+\alpha\,\frac{dl}{d\lambda}\right]=-\frac{\int_0^1 x^2u^2\,dx}{u(1)^2}\,.$$

Da questa infine discende:

$$(2)\qquad \frac{d\lambda}{d\alpha}=-\frac{lu(1)^2}{\alpha\dfrac{dl}{d\lambda}\,u(1)^2+2\lambda\int_0^1 x^2u^2\,dx}\,.$$

Usiamo della (2) per ricavare il valore di $\dfrac{d\lambda}{d\alpha}$ per $\alpha=0$. Se $\alpha=0$ il sistema (II) diviene:

$$(\mathrm{IV})\quad\begin{cases}(x^2u')'=(\lambda^2x^2+2)\,u\,, \qquad 0\le x\le 1\\ u'(1)+h\,u(1)=0\,, \qquad u=0\,,\end{cases}$$

sistema che caratterizza le vibrazioni radiali che dànno tensioni superficiali nulle. Gli autovalori λ, come le corrispondenti funzioni che soddisfanno al sistema (IV) sono imaginari puri. Poniamo allora

$$\lambda = i\,\lambda_0 \quad , \quad u = i\,u_0 \, ,$$

con λ_0, u_0 reali.

La (2) diviene allora:

$$\left.\frac{d\lambda}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{\lambda_0\, u_0(1)^2}{2\int_0^1 x^2 u_0^2\, dx}\;\frac{B\,\lambda_0 + i\,A}{A^2 + B^2\lambda_0^2}. \tag{2}$$

Poniamo:

$$\lambda = -\,m + i\,n\,,$$

n e λ_0 saranno dello stesso segno: supponiamo positivi. La (2) si scinde nelle relazioni:

$$\left.\frac{dm}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\lambda_0^2\, u_0(1)^2\, B}{2\int_0^1 x^2 u_0^2\, dx\,(A^2 + B^2\lambda_0^2)}$$

$$\left.\frac{dn}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\frac{A\,\lambda_0\, u_0(1)^2}{2(A^2 + B^2\lambda_0^2)\int_0^1 x^2 u_0^2\, dx}\,.$$

Per α sufficientemente piccolo si ha dunque:

$$m > 0 \tag{3}$$

$$n(\alpha) < \lambda_0 = n(0)\,. \tag{4}$$

La (3) è caso particolare di un teorema generale già dimostrato (Cfr. Nota citata pag. 25). La (4) dà il teorema: *se* $\alpha = \frac{\varrho_1 a^2}{R^2}$ *è una quantità sufficientemente piccola, le durate delle oscillazioni della sfera vibrante radialmente nel fluido, sono maggiori delle corrispondenti oscillazioni della sfera stessa vibrante nel vuoto.*

Consegue poi, per α sufficientemente piccolo, la seguente espressione della frequenza della sfera vibrante nel fluido:

$$n(\alpha) = \lambda_0 - \frac{A\,\lambda_0\, u_0(1)^2}{2(A^2 + B^2\lambda_0^2)\int_0^1 x^2 u_0^2\, dx}\,\alpha\,.$$

In una successiva Nota estenderò il risultato ora ottenuto e quello (Cfr. la Nota citata al principio) relativo al segno della parte reale dei valori eccezionali λ ad una equazione autoaggiunta generica.