ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie i cui spazi osculatori sono biosculatori.* Nota della dott. Maria Castellani, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. In varî modi è stato dimostrato che se i piani tangenti ad una superficie hanno due punti distinti di contatto, ne hanno infiniti (¹) e la superficie è una sviluppabile. Orbene tale proprietà relativa agli intorni del 1° ordine non ha riscontro in proprietà analoga per gli intorni di ordine superiore; mostrerò infatti in questa mia Nota che esistono classi di superficie per le quali ogni spazio 2-osculatore, S(2) (²), ha due punti distinti di osculazione, cioè è biosculatore, senza averne di conseguenza infiniti.

2. Sia data una superficie F di S_r $(r > 5)$ i cui S(2) osculatori siano, come accade in generale, S_5 e ciascuno di essi abbia due punti di osculazione distinti P e Q.

Cominciamo con l'osservare che l'intersezione di due S_5 infinitamente vicini, osculatori rispettivamente in P e P′ (e quindi in Q e Q′), contiene tanto il piano tangente in P, quanto quello tangente in Q.

Se questi due piani sono indipendenti il loro S_5 è lo spazio 2-osculatore sia in P che in P′, cioè lo S(2) non varia, passando da un punto di F ad uno qualsiasi contenuto nell'intorno del 1° ordine di esso; questo $S(2) \equiv S_5$ conterrebbe in tal caso tutta la F, il che è da escludere.

Escludiamo pure che i piani tangenti in P e Q coincidano, perchè, per quanto si è detto, la superficie è allora rigata sviluppabile e la soluzione ha perciò scarso interesse.

Rimangono quindi da esaminare i due casi seguenti:

a) i piani tangenti in punti corrispondenti (come P e Q) stanno in S_4;

b) oppure stanno in S_3.

(¹) Del Pezzo, *Sugli spazi tangenti*..... (Rend. della R. Accademia di Napoli, 1886); Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, cap. 9°, n. 13, Pisa, Spoerri, 1907.

(²) Per spazio 2-osculatore in un punto di una superficie intenderemo il minimo spazio che contiene gli S_2 osculatori alle curve per il punto; poichè tale spazio ha in comune con la superficie l'intorno del 1° e del 2° ordine è espressivo il rappresentarlo con il simbolo S(2); E. Bompiani, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (Atti R. Accademia d. Scienze di Torino, 1913).

3. Dimostriamo che nel caso *a*) vi sono su F ∞^1 curve lungo le quali è fisso lo S_5 2-osculatore (cioè la F ha soltanto ∞^1 di questi S_5).

Lo spazio *caratteristico* di un S_5 (spazio comune ad S_5 e a tutti quelli infinitamente vicini nell'intorno del 1° ordine) è un S_4 (¹): voglio provare che si ha $S(3) = S_6$.

Consideriamo due regioni di F adiacenti a due punti P, Q e su di esse fissiamo le linee coordinate in modo che punti corrispondenti abbiano le stesse coordinate curvilinee u, v. Indichiamo con P^{rs} le derivate $\frac{\partial^{r+s} P}{\partial u^r \, \partial v^s}$ delle coordinate omogenee di P, omettendo l'indice relativo ad una coordinata generica; analogamente per Q. Poichè i piani tangenti nei punti P e Q determinano un S_4, i punti $P, Q, P^{10}, P^{01}, Q^{10}, Q^{01}$ sono linearmente dipendenti, quindi potremo prescindere da uno di essi, per esempio Q^{01}.

Lo S_5 2-osculatore in P potrà individuarsi con lo S_4 precedente e con un punto dell'intorno del 2° ordine di P, cioè, essendo le linee u, v arbitrarie, per esempio con i punti $P, Q, P^{10}, P^{01}, Q^{10}, Q^{01}, P^{20}$. A questo S_5, per definizione di S(2) osculatore e per la proprietà di F, appartengono i punti $P^{11}, P^{02}, Q^{10}, Q^{11}, Q^{02}$ dell'intorno del 2° ordine e valgono per conseguenza relazioni di questo tipo:

$$P^{11} = \alpha P^{10} + \beta P^{10} + \gamma P^{01} + \delta Q^{10} + \varepsilon P + \zeta Q$$

in cui $\alpha, \dots \zeta$ sono funzioni di u, v indipendenti dalle coordinate di P o di Q che si considerano. Oltre a queste relazioni valgono le loro conseguenze differenziali, sicchè per esempio:

$$P^{21} = \alpha P^{30} + \dots.$$

ove i puntini indicano termini contenenti derivate di P e di Q d'ordine ≤ 2 (²) che per le relazioni stesse si possono sostituire con combinazioni lineari dei 6 punti che abbiamo preso per individuare lo S(2) osculatore in P (e Q).

Consideriamo ora lo S_5 2-osculatore in $P' = P + P^{10}du + P^{01}dv$ e congiungiamolo allo S(2) osculatore in P. Lo S_6 congiungente è individuato dallo S_5 osculatore in P e dal punto (³):

$$P^{30}du + P^{21}dv = P^{30}(du + \alpha dv) + \dots.$$

(¹) Si potrebbe concludere direttamente a questo punto con l'affermazione fatta, servendosi del Lemma di Bompiani [E. Bompiani, *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee*, Rend. Istituto Lombardo, 1919, § 3]; la dimostrazione che segue sfrutta le particolari circostanze che si presentano in questo caso indipendentemente dal Lemma citato.

(²) Coefficienti di queste derivate sono le funzioni $\alpha, \dots \zeta$ e le derivate rapporto ad u.

(³) Si suppone, naturalmente, che P^{30} non stia nello S(2) osculatore in P; la supposizione è lecita, perchè le linee coordinate sono generiche e quindi, se ciò non accadesse, la superficie starebbe in S_5. Si può poi facilmente verificare che anche gli altri punti derivati secondi di P' stanno in quello S_6.

cioè da P^{3o}, potendo sempre ritenere, per l'arbitrarietà della scelta delle linee u, v, $du/dv \neq -\alpha$. Lo $S(3)$ osculatore in P (e Q) è dunque un S_6. Proviamo ora che gli $S(2) \equiv S_5$ sono soltanto ∞^1, cioè che nell'intorno del 1° ordine di uno di essi ve ne è uno solo.

Ciò è evidente, perchè gli S_5 nell'intorno di quello fissato passano per lo S_4 caratteristico e stanno in S_6 quindi formerebbero fascio (cui appartiene lo S_5 fissato) intorno allo S_4; ma nel fascio non v'è che un S_5 infinitamente vicino a quello fissato.

Ogni S_5 è quindi 2-osculatore alla superficie in tutti i punti di una curva e, se si esclude che la superficie stessa stia in S_5, le ∞^1 curve così determinate stanno negli S_3 di una sviluppabile.

4. Veniamo ora al caso *b*): i piani tangenti in P e Q determinano un S_3.

La congruenza delle rette come PQ è quindi tale che tutte le rette di essa situate nell'intorno del 1° ordine di una generatrice generica stanno con questa in un S_3. Segue subito da ciò che su ogni generatrice della congruenza si trovano due fuochi (distinti o coincidenti); cioè la congruenza è di quelle (particolari in S_4) che ammettono superficie (o curve) focali.

Nel caso generale, in cui si hanno due superficie focali distinte si ha una *congruenza di Laplace* (¹); le sue rette sono dunque tangenti alle linee di un sistema che fa parte di un doppio sistema coniugato (di una) delle superficie focali.

Se le superficie focali coincidono in una, questa possiede *un* sistema semplice di asintotiche e le rette della congruenza sono tangenti ad esse.

Possono infine le superficie focali della congruenza essere sostituite da curve incontrate (senza contatto) dalle rette della congruenza. Diremo in ogni caso, per brevità, che si ha una *congruenza di Laplace.*

È facile constatare che una superficie incontrata in più di un punto da una generatrice generica della congruenza è una superficie del tipo voluto.

Infatti nel caso generale (e analogamente si verifica per gli altri) ogni superficie F immersa nella congruenza di Laplace ha per $S(2)$ osculatore in un suo punto P che appartenga alla tangente in un punto A, secondo una linea del sistema coniugato di una superficie focale, lo S_5 congiungente i due S_4 2-osculatori a questa in A e nel punto infinitamente vicino sulla tangente fissata. Questo S_5 non dipende da P, ma soltanto dalla generatrice per esso: se questa incontra la F in un altro punto Q gli $S(2)$ osculatori in P e Q coincidono.

(¹) Segre, *Preliminari di una teoria.....* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXX, 2° semestre, 1910); E. Bompiani, *Sull'equazione di Laplace* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXIV, 2° semestre, 1912); *Pour la géométrie de l'équation de Laplace* (Comptes-Rendus de l'Acad. des Sciences, t. 160, pag. 57).

5. Riassumendo si ha:

Esistono due classi di superficie di S_r $(r > 5)$ *tali che i loro* S_5 *2-osculatori hanno (almeno) due punti distinti di osculazione con la superficie. Esse sono:*

a) *le superficie con* ∞^1 S_5 *2-osculatori, contenenti* ∞^1 *curve in* S_3 *di cui due infinitamente vicini si segano in piani* (cioè in S_3 osculatori ad una curva e casi degeneri);

b) *le superficie con* ∞^2 S_5 *2-osculatori immerse in una congruenza di Laplace e incontrate da ogni generatrice in più di un punto.*

Geometria. — *Sur les formes différentielles de M. Fubini.* Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Soient les coordonnées homogènes x des points et ξ des hyperplans tangents [1] d'une hypersurface Π de l'espace linéaire à $n+1$ dimensions exprimées en fonction de n variables indépendantes quelconques $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et posons

$$F_2 = -S\,dx\,d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik}\,du_i\,du_k\,, \tag{1}$$

$$\Lambda_3 = S(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 2\sum_{ikl} D_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l\,, \tag{2}$$

$$\nabla = |\Delta_{ik}|\ (^2)\,,\quad \vartheta_{ik} = \frac{1}{\nabla}\frac{\partial\nabla}{\partial\Delta_{ik}}\,,$$

$$F_3 = \Lambda_3 - \frac{6}{n+2}F_2\sum_{ikl}\vartheta_{ik}D_{ikl}\,du_l = 2\sum_{ikl}\Delta_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l\,, \tag{3}$$

ainsi que l'on a

$$\sum_{ik}\vartheta_{ik}\Delta_{ikl} = 0\,. \tag{4}$$

Soient de plus X et Ξ des solutions quelconques des équations

$$SX\xi = 1\,,\ SX\frac{\partial\xi}{\partial u_i} = 0\ ;\ S\Xi x = 1\,,\ S\Xi\frac{\partial x}{\partial u_i} = 0\,. \tag{5}$$

On trouve que les x et les ξ vérifient des équations de la forme

$$x_{ik} = \sum_{rs}\vartheta_{rs}D_{ikr}\frac{\partial x}{\partial u_s} + b_{ik}x + \Delta_{ik}X\,, \tag{6}$$

$$\xi_{ik} = -\sum_{rs}\vartheta_{rs}D_{ikr}\frac{\partial x}{\partial u_s} + \beta_{ik}\xi + \Delta_{ik}\Xi\,, \tag{6'}$$

[1] Les facteurs de proportionalité étant choisis d'une manière quelconque.
[2] On suppose $\nabla \neq 0$.