

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

5. Riassumendo si ha:

Esistono due classi di superficie di S_r ($r > 5$) tali che i loro S_5 2-oscultori hanno (almeno) due punti distinti di osculazione con la superficie. Esse sono:

a) *le superficie con ∞^1 S_5 2-oscultori, contenenti ∞^1 curve in S_3 di cui due infinitamente vicini si segano in piani (cioè in S_3 oscultori ad una curva e casi degeneri);*

b) *le superficie con ∞^2 S_5 2-oscultori immerse in una congruenza di Laplace e incontrate da ogni generatrice in più di un punto.*

Geometria. — *Sur les formes différentielles de M. Fubini.*
Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. Soient les coordonnées homogènes x des points et ξ des hyperplans tangents ⁽¹⁾ d'une hypersurface Π de l'espace linéaire à $n + 1$ dimensions exprimées en fonction de n variables indépendantes quelconques u_1, u_2, \dots, u_n et posons

$$(1) \quad F_2 = -S dx d\xi = \sum_{ik} \Delta_{ik} du_i du_k,$$

$$(2) \quad \Lambda_3 = S(dx d^2\xi - d\xi d^2x) = 2 \sum_{ikl} D_{ikl} du_i du_k du_l,$$

$$\nabla = |\Delta_{ik}|^{(2)}, \quad \vartheta_{ik} = \frac{1}{\nabla} \frac{\partial \nabla}{\partial \Delta_{ik}},$$

$$(3) \quad F_3 = \Lambda_3 - \frac{6}{n+2} F_2 \sum_{ikl} \vartheta_{ik} D_{ikl} du_l = 2 \sum_{ikl} \Delta_{ikl} du_i du_k du_l,$$

ainsi que l'on a

$$(4) \quad \sum_{ik} \vartheta_{ik} \Delta_{ikl} = 0.$$

Soient de plus X et Ξ des solutions quelconques des équations

$$(5) \quad SX\xi = 1, \quad SX \frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0; \quad S\Xi x = 1, \quad S\Xi \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0.$$

On trouve que les x et les ξ vérifient des équations de la forme

$$(6) \quad x_{ik} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial x}{\partial u_s} + b_{ik} x + \Delta_{ik} X,$$

$$(6') \quad \xi_{ik} = - \sum_{rs} \vartheta_{rs} D_{ikr} \frac{\partial \xi}{\partial u_s} + \beta_{ik} \xi + \Delta_{ik} \Xi,$$

⁽¹⁾ Les facteurs de proportionnalité étant choisis d'une manière quelconque.

⁽²⁾ On suppose $\nabla \neq 0$.

x_{ik} et ξ_{ik} étant les dérivées secondes covariantes formées par rapport à la forme F_2 . Pour $(u_1 \dots u_n)$ données, une quadrique par rapport à laquelle les hyperplans polaires des points

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n}$$

sont

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n}$$

à un contact du second ordre avec Π , et $\Lambda_3 = 0$ donne les tangentes à la variété d'intersections de Π et la quadrique. La congruence des droites xX est *conjuguée* à Π , en ce sens que, en chaque point de Π , les n directions correspondantes au développables de la congruence sont *conjuguées* par rapport à la quadrique $F_2 = 0$ des directions asymptotiques. Corrélativement pour la congruence $\xi \Xi$. Si l'on multiplie les x par un facteur quelconque ϱ et les ξ par le facteur σ , les formes F_2, Λ_3, F_3 se transforment comme il suit

$$(7) \quad F'_2 = \varrho \sigma F_2, \quad \Lambda'_3 = \varrho \sigma (\Lambda_3 + 3 F_2 d \log \varrho / \sigma), \quad F'_3 = \varrho \sigma F_3.$$

2. Le facteur des x étant toujours quelconque, je fixe maintenant les ξ à une racine $(n+2)^{\text{ième}}$ de l'unité près par la condition

$$(8) \quad \left| x, \frac{\partial x}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u_n}, X \right| = \left| \xi, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial u_n}, \Xi \right|.$$

Alors, on a simplement $F_3 \equiv \Lambda_3$ et on peut poser

$$(9) \quad X = \frac{1}{n} \Delta_2 x, \quad \Xi = \frac{1}{n} \Delta_2 \xi,$$

où Δ_2 est le paramètre différentiel second formé par rapport à F_2 . La quadrique par rapport à laquelle les hyperplans polaires des points

$$\lambda x + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial x}{\partial u_n} + \mu \Delta_2 x$$

sont

$$\lambda \xi + \lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \xi}{\partial u_n} + \mu \Delta_2 \xi$$

peut être appelée la *quadrique de Lie*, se réduisant à celle qui est connue sous ce nom pour $n=2$. On a la propriété suivante: Si l'on choisit dans l'hyperplan ξ un espace E_r à r dimensions ($1 \leq r \leq n$) passant par le point x , les quadriques de Lie (à r dimensions) des sections de Π par tous

les espaces à $\nu + 1$ dimensions contenant E , sont situées sur une quadrique à n dimensions.

3. On achève la détermination des facteurs de proportionnalité ⁽¹⁾ soit en choisissant le facteur de la forme F_2 , soit le facteur des ξ , par exemple. Ce dernier choix est d'ailleurs (à un facteur numérique des ξ près) équivalent au choix de la congruence xX , liée à la condition unique d'être conjuguée à Π au sens expliqué plus haut. On peut appeler la droite xX la normale de la métrique définie par la forme F_2 ⁽²⁾. En général, par chaque point de Π passent $2^n - 1$ géodésiques de cette métrique, dont les plans osculateurs contiennent la normale. Les tangentes de ces géodésiques forment la généralisation des trois tangentes de Segre du cas $n = 2$. Elles sont d'ailleurs indépendantes du facteur de F_2 et peuvent être définies comme les directions ayant la même polaire linéaire par rapport aux deux cônes apolaires $F_2 = 0$ et $F_3 = 0$.

4. Supposons maintenant que les x, ξ , toujours fonctions de n paramètres $u_1 \dots u_n$, satisfaisant aux conditions

$$S \xi x = S \xi dx = 0,$$

sont les coordonnées dans un espace linéaire à plus de $n + 1$ dimensions. On a alors une variété d'éléments à n dimensions. On peut, comme précédemment, former les formes F_2, Λ_3, F_3 . Mais ici, on ne peut plus, en général, déterminer les facteurs de proportionnalité de manière d'avoir $F_3 = \Lambda_3$. Pour (u_1, \dots, u_n) données, projetons les plans osculateurs des courbes tracées sur la variété des points x , le centre de projection étant l'espace d'intersection de $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \xi}{\partial u_n}$. Si une correspondance entre deux variétés d'éléments est telle que, pour chaque couple d'éléments correspondants, les deux ensembles d'espaces projetants que je viens de définir sont homographiques, on peut dire, en généralisant la locution de M. Fubini, que les deux variétés d'éléments sont projectivement applicables. Or la condition analytique pour l'applicabilité projective des variétés d'éléments est l'invariance de la forme différentielle fractionnaire $\frac{F_3}{F_2}$, tout au moins quand cette expression a un sens, c'est-à-dire si $\nabla \neq 0$.

5. Pour les détails, voir le Mémoire *I fondamenti di geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo del Fubini* qui paraîtra dans les *Annali di Matematica*.

⁽¹⁾ Je suppose toujours vérifiée la condition (8).

⁽²⁾ On voit que si l'on prend pour ξ les coordonnées cartésiennes normales (les cosinus directeurs et la distance de l'origine), on a la normale ordinaire.