ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque.* Nota di JOSEPH LIPKA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il parallelismo di Levi-Civita annunziato la prima volta nel 1917 [1] ha avuto molte applicazioni notevoli e ci ha condotto a risultati importanti. Lo scopo di questa Nota è di mostrare come la curvatura geodetica in un punto qualsiasi di una curva in una varietà qualunque può essere definita intrinsecamente per mezzo della nozione di parallelismo; questa definizione è un'estensione semplice di quella della curvatura ordinaria in uno spazio euclideo.

Consideriamo una curva γ in una varietà qualunque, dove il quadrato dell'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = \sum_{rt}^{n} {}_1\, a_{rt}\, dx_r\, dx_s\,. \tag{1}$$

Sia s l'arco di γ contato a partire da un'origine arbitraria.

Siano P *e* Q *due punti di γ infinitamente vicini corrispondenti a s e $s + ds$. In* Q, *costruiamo la tangente a γ e la parallela (secondo Levi-Civita) alla tangente in* P. *Se si designa con $d\omega$ l'angolo di queste direzioni, si definisce la curvatura geodetica di γ in* P, *mediante la*

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{ds \to 0} \frac{d\omega}{ds}\,. \tag{2}$$

Ora, in una varietà euclidea, il parallelismo di Levi-Civita coincide col parallelismo ordinario, sicchè l'angolo $d\omega$ si identifica col cosidetto angolo di contingenza, e per conseguenza la nostra definizione della curvatura geodetica coincide con quella della curvatura ordinaria.

La definizione usuale della curvatura geodetica in un punto P di una curva in una varietà qualunque, data dal Bianchi [2], è la seguente: Sia g la geodetica in P nella direzione di γ; sulle γ e g si prendano uguali ele-

(1) *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana* [Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, tomo 42, 1917].

(2) *Geometria differenziale*, 2ª edizione, vol. I, pag. 363.

menti lineari PQ e PR; allora, la curvatura geodetica di γ in P si definisce come

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{Q \to P} \frac{2QR}{(PQ)^2},$$

la cui espressione analitica si trova essere

$$(3) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \sum_{1}^{n}{}_{rt}\, a_{rt} \left[\frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\right]\left[\frac{d^2 x_t}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\right].$$

Vogliamo costruire l'espressione analitica di $1/\varrho$ data dalla nostra definizione, e mostriamo che questa è d'accordo con quella data dal Bianchi.

Designiamo con $\bar{a}_{rt}$ i valori in Q dei coefficienti della forma fondamentale (1), cioè

$$(4) \qquad \bar{a}_{rt} = a_{rt} + \frac{da_{rt}}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2 a_{rt}}{ds^2} ds^2 \text{ (1)}.$$

Sia $\xi^{(r)}$ il sistema contravariante (parametri) di una direzione generica uscente da P, con che

$$(5) \qquad \sum_{rt} a_{rt}\, \xi^{(r)} \xi^{(t)} = 1 ;$$

e sia $\xi^{(r)} + \frac{d\xi^{(r)}}{ds} ds + \frac{1}{2}\frac{d^2 \xi^{(r)}}{ds^2} ds^2$ il sistema contravariante (parametri) di una direzione corrispondente uscente da Q; avremo analogamente

$$(6) \qquad \sum_{rt} \bar{a}_{rt} \left(\xi^{(r)} + \frac{d\xi^{(r)}}{ds} ds + \frac{1}{2}\frac{d^2 \xi^{(r)}}{ds^2} ds^2\right) \times$$
$$\times \left(\xi^{(t)} + \frac{d\xi^{(t)}}{ds} ds + \frac{1}{2}\frac{d^2 \xi^{(t)}}{ds^2} ds^2\right) = 1.$$

La condizione che la direzione in Q sia parallela alla direzione in P è (2)

$$(7) \qquad \frac{d\xi^{(r)}}{ds} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} x'_i\, \xi^{(k)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

dove $x'_r = \frac{dx_r}{ds}$ individua la direzione di trasporto PQ o la tangente in P.

Ora, se $\xi^{(r)}$ coincide con x'_r, la parallela in Q alla tangente in P ha i parametri

$$x'_r + \frac{d_L x'_r}{ds} ds + \frac{1}{2}\frac{d_L^2 x'_r}{ds^2} ds^2 \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

(1) Per il nostro scopo, non è necessario di prendere lo sviluppo dei valori delle funzioni in Q al di là di termini del 2° ordine in ds.

(2) Cfr. nota (1), pag. 7.

colle condizioni

$$(6')\qquad \sum\nolimits_{rt} \bar{a}_{rt}\left(x'_r + \frac{d_L x'_r}{ds}ds + \tfrac{1}{2}\frac{d_L^2 x'_r}{ds^2}ds^2\right)\times$$

$$\times\left(x'_t + \frac{d_L x'_t}{ds}ds + \tfrac{1}{2}\frac{d_L^2 x'_t}{ds^2}ds^2\right) = 1\,,$$

$$(7')\qquad \frac{d_L x'_r}{ds} + \sum\nolimits_{ik}\left\{ {ik \atop r} \right\} x'_i x'_k = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Inoltre, se si designano con

$$x'_r + \frac{d_T x'_r}{ds}ds + \tfrac{1}{2}\frac{d_T^2 x'_r}{ds^2}ds^2 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

i parametri della direzione tangente in Q, questi sono legati dalla condizione

$$(6'')\qquad \sum\nolimits_{rt} \bar{a}_{rt}\left(x'_r + \frac{d_T x'_r}{ds}ds + \tfrac{1}{2}\frac{d_T^2 x'_r}{ds^2}ds^2\right)\times$$

$$\times\left(x'_t + \frac{d_T x'_t}{ds}ds + \tfrac{1}{2}\frac{d_T^2 x'_t}{ds^2}ds^2\right) = 1\,.$$

È comodo di scrivere

$$(8)\qquad \frac{d_T x'_r}{ds} + \sum\nolimits_{ik}\left\{ {ik \atop r} \right\} x'_i x'_k = \beta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le β_r sono funzioni di s, cioè dipendono dalle equazioni della curva γ. Introduciamo anche le abbreviazioni

$$(9)\qquad \alpha_r = \sum\nolimits_{ik}\left\{ {ik \atop r} \right\} x'_i x'_k \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ha, finalmente, in Q, la parallela alla direzione tangente in P coi parametri $x'_r - \alpha_r\,ds - \frac{1}{2}\frac{d\alpha_r}{ds}ds^2$, e la direzione tangente in Q coi parametri $x'_r + (\beta_r - \alpha_r)\,ds + \frac{1}{2}\left(\frac{d\beta_r}{ds} - \frac{d\alpha_r}{ds}\right)ds^2$; questi parametri essendo legati dalle identità

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum\nolimits_{rt}\bar{a}_{rt}\left\{x'_r - \alpha_r\,ds - \tfrac{1}{2}\frac{d\alpha_r}{ds}ds^2\right\}\left\{x'_t - \alpha_t\,ds - \tfrac{1}{2}\frac{d\alpha_t}{ds}ds^2\right\} = 1\,,\\ &\sum\nolimits_{rt}\bar{a}_{rt}\left\{x'_r + (\beta_r - \alpha_r)\,ds + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\beta_r}{ds} - \frac{d\alpha_r}{ds}\right)ds^2\right\}\times\\ &\qquad\times\left\{x'_t + (\beta_t - \alpha_t)\,ds + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\beta_t}{ds} - \frac{d\alpha_t}{ds}\right)ds^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

L'angolo $d\omega$ di queste due direzioni è dato da

$$(11)\quad \cos d\omega = \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left\{ x'_r - \alpha_r\, ds - \tfrac{1}{2}\frac{d\alpha_r}{ds}\, ds^2 \right\} \times$$
$$\times \left\{ x'_t + (\beta_t - \alpha_t)\, ds + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\beta_t}{ds} - \frac{d\alpha_t}{ds}\right) ds^2 \right\}.$$

Per la prima identità (10), la (11) diviene

$$(12)\quad \cos d\omega = 1 + \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(x'_r - \alpha_r\, ds - \tfrac{1}{2}\frac{d\alpha_r}{ds}\, ds^2 \right)\left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2}\frac{d\beta_t}{ds}\, ds^2 \right).$$

Sottraendo le due identità (10) membro a membro, si ha

$$(13)\quad 2\sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(x'_r - \alpha_r\, ds - \tfrac{1}{2}\frac{d\alpha_r}{ds}\, ds^2 \right)\left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2}\frac{d\beta_t}{ds} \right) +$$
$$+ \sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(\beta_r\, ds + \tfrac{1}{2}\frac{d\beta_r}{ds}\, ds^2 \right)\left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2}\frac{d\beta_t}{ds}\, ds^2 \right) = 0,$$

e sostituendo in (12), risulta

$$(14)\quad \cos d\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\sum_{rt} \overline{a}_{rt} \left(\beta_r\, ds + \tfrac{1}{2}\frac{d\beta_r}{ds}\, ds^2 \right)\left(\beta_t\, ds + \tfrac{1}{2}\frac{d\beta_t}{ds}\, ds^2 \right).$$

Coll'espressione di $\overline{a}_{rt}$ fornita dalla (4), e sviluppando, si ha subito

$$(15)\quad \cos d\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\sum_{rt} a_{rt}\, \beta_r\, \beta_t\, ds^2 + (\text{termini in } ds^3, \text{ ecc.}).$$

Ma

$$(16)\quad \cos d\omega = 1 - \tfrac{1}{2}(d\omega)^2 + \cdots.$$

Perciò

$$(d\omega)^2 + \cdots = \sum_{rt} a_{rt}\, \beta_r\, \beta_t\, ds^2 + \cdots,$$

e quindi

$$(17)\quad \lim_{ds \to 0} \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = \sum_{rt} a_{rt}\, \beta_r\, \beta_t.$$

Finalmente, sostituendo i valori di β_r da (8), e scrivendo $x'_r = \dfrac{dx_r}{ds}$, si ricava

$$(18)\quad \frac{1}{\varrho^2} = \sum_{rt} a_{rt} \left[\frac{d^2 x_r}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \right]\left[\frac{d^2 x_t}{ds^2} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} i\,k \\ t \end{Bmatrix} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds} \right],$$

che coincide con l'espressione analitica (3) trovata dal Bianchi.