ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet.* Nota di M. PICONE, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Fin dallo scorso agosto sono in possesso di alcuni nuovi risultati concernenti l'integrazione approssimata delle equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine totalmente ellittiche della fisica-matematica. Dietro l'autorevole incitamento del Prof. Marcolongo mi decido a comunicare alla Accademia dei Lincei, in forma molto riassuntiva, taluni di quei risultati dai quali scaturisce un nuovo metodo di calcolo approssimato per la soluzione del problema di Dirichlet, metodo che, a mio modo di vedere, *può veramente proporsi al fisico*. La sistematica esposizione di questi miei studî è in corso di pubblicazione nel *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

1. Le funzioni $f_0(s), f_1(s), \dots, f_n(s), \dots$, costituenti una successione illimitata, siano definite nell'intervallo $(0, l)$, esse si diranno *linearmente indipendenti in* $(0, l)$ se, per ogni valore di n, sono tali le $n+1$ funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n$. Se le funzioni del considerato sistema illimitato $[f_k(s)]$ sono, ciascuna, di quadrato sommabile in $(0, l)$, il sistema si dirà *completo in* $(0, l)$, quando per ogni funzione $f(s)$, definita in $(0, l)$ ed ivi di quadrato sommabile, per la quale si ha simultaneamente

$$\int_0^l f_k(s)\, f(s)\, ds = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

si deduce

$$\int_0^l [f(s)]^2\, ds = 0 .$$

2. METODO D'APPROSSIMAZIONE DEI MINIMI QUADRATI. — Dato, in $(0, l)$, il sistema completo $[f_k]$ di funzioni linearmente indipendenti, volendo, per combinazioni lineari di queste funzioni, approssimare in tutto $(0, l)$, un'assegnata funzione $f(s)$, ivi di quadrato sommabile, si determinino per ogni valore di n, le costanti $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ in modo da rendere minimo l'integrale:

$$\int_0^l (f - a_0^{(n)} f_0 - a_1^{(n)} f_1 - \cdots - a_n^{(n)} f_n)^2\, ds ,$$

si determinino cioè quelle costanti in modo da soddisfare al seguente sistema di equazioni lineari

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_0^l f_i f_k \, ds = \int_0^l f f_i \, ds \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{1}$$

si dimostra allora che:

La combinazione lineare $F_n(s) = a_0^{(n)} f_0(s) + a_1^{(n)} f_1(s) + \cdots + a_n^{(n)} f_n(s)$, *al divergere di* n, *converge in media, su* $(0, l)$, *verso la funzione* $f(s)$.

3. Completezza dei polinomii armonici sopra una qualunque curva regolare. — Sia z la variabile complessa sul piano (x, y) e si ponga:

$$u_0(x, y) = 1, \quad u_{2\nu-1}(x, y) = -\mathrm{R}[i z^\nu], \quad u_{2\nu}(x, y) = \mathrm{R}[z^\nu],$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots),$$

si dimostra il seguente:

Teorema fondamentale. — *Comunque si assegni nel piano* (x, y) *una curva regolare* Γ *di arco* s *— chiusa o aperta, priva di punti multipli — supposto che i punti di* Γ *si abbiano tutti al variare di* s *fra* 0 *e* l, *posto*:

$$u_k(x, y) \text{ su } \Gamma = f_k(s) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

il sistema $[f_k(s)]$ *è sempre completo in* $(0, l)$, *ed è di funzioni ivi linearmente indipendenti.*

Se, in particolare, la curva Γ è un cerchio o un arco di cerchio, di raggio *uno*, si ha la nota completezza del sistema $[\cos ks, \operatorname{sen} ks]$; se la curva Γ è un segmento rettilineo, dell'asse delle x, si ha la nota completezza del sistema $[x^k]$.

4. Nuovo metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet. — Sia Ω un assegnato dominio regolare (semplicemente connesso) — affatto arbitrario — del piano (x, y), sussiste il seguente

Teorema. — *Comunque si assegni sul contorno* Γ *di* Ω *una funzione* $f(s)$ *del suo arco* s, *di quadrato sommabile, considerate le funzioni* $f_k(s)$ *definite dalle* (2), *si risolva, per ogni valore di* n, *il sistema lineare* (1) *e si ponga*

$$U_n(x, y) = a_0^{(n)} u_0(x, y) + a_1^{(n)} u_1(x, y) + \cdots + a_n^{(n)} u_n(x, y),$$

si ha allora che: I) *Il polinomio armonico* $U_n(x, y)$, *al divergere di* n, *converge su* Γ, *in media, verso la funzione* $f(s)$. II) *In ogni dominio completamente interno ad* Ω, *il polinomio armonico* $U_n(x, y)$, *al divergere di* n, *converge uniformemente verso una funzione armonica* $u(x, y)$. III) *Se esiste in* Ω *una funzione armonica che, su* Γ, *prende i valori rappresentati da* $f(s)$, *essa non può essere che la funzione* $u(x, y)$ *testè indicata.*

5. Identici risultati si hanno per il calcolo approssimato della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u = 0$, in tre variabili.

È per me motivo di compiacimento l'essermi incontrato, nel proporre questi nuovi metodi di calcolo per la soluzione del problema di Dirichlet, con l'eminente fisico Marcel Brillouin del Collegio di Francia. Devo alla cortesia di Henri Villat — il nuovo direttore del *Journal de Mathématiques* — la conoscenza, a ricerca compiuta, della memoria del Brillouin: *La méthode des moindres carrés et les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique*, pubblicata, durante la guerra, nel fascicolo settembre-ottobre 1916 degli *Annales de Physique* (tome VI, pp. 137-223). In questa memoria, per taluni casi particolari, supponendo sempre di rotazione il dominio per il quale si vuol risolvere il problema di Dirichlet, il Brillouin propone e raccomanda metodi di calcolo d'approssimazione per la soluzione del problema indicato, che rientrano appunto nei miei. Il Brillouin non dimostra però la convergenza dei proposti metodi d'approssimazione, anzi conclude testualmente così:

« Les séries ainsi construites ne sont pas sans défaut. D'abord, il faudrait « savoir quelles sont les conditions de convergence certaine dans l'espace « compris entre les frontières. J'espère que quelques mathématiciens atta- « queront cette question délicate. . . . .
. . . .

« Bien que ce travail soit uniquement théorique, l'absence (que je re- « grette) de démonstrations de convergence ne permet guère de le classer « sous la rubrique « Physique mathématique ». Ce n'est qu'une méthode « universelle d'organisation des calculs numériques rélatifs aux équations aux « dérivées partielles linéaires ».

Astronomia. — *Sugli indici di colore e sugli spettri delle stelle doppie.* Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Socio A. Di Legge.

I principali osservatori di stelle doppie, come W. Struve e Dembowski, oltre alla stima delle grandezze delle componenti, dànno il loro colore espresso in varî gradi di una scala cromatica dal violetto al rosso. Benchè su questa scala possono avere influenza fenomeni fisiologici (1), la grandezza e gli errori dei mezzi ottici adoperati tuttavia, come è stato più volte discusso da varî autori, tali stime di colore concordano in massima fra di loro e con le determinazioni posteriori dei tipi spettrali almeno per le stelle più lucenti.

(1) L. Bell, *Star colors*. Astrophys. Journ., 31, p. 234. 1910.