ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1922.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sulla trasformazione di Lorentz.* Nota del Socio C. Somigliana.

I.

L'equazione delle onde piane, se x è la direzione di propagazione e si pone $y = ct$ (ove t è il tempo e c la velocità di propagazione) può scriversi

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

dove Ω rappresenta il vettore vibrante, che sarà parallelo alla direzione di propagazione, se si tratta di onde longitudinali. Se le onde sono trasversali, Ω sarà una delle due componenti normali alla direzione di propagazione.

L'equazione (1) ammette il classico integrale di D'Alembert

$$\Omega = f(x + y) + g(x - y) \tag{2}$$

ove f, g sono funzioni arbitrarie. Introduciamo ora due nuove variabili x', y' definite mediante le relazioni

$$x + y = \varphi(x' + y') \qquad x - y = \psi(x' - y') \tag{3}$$

ove φ, ψ sono due nuove funzioni arbitrarie. Avremo

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\,\varphi(x' + y') + \tfrac{1}{2}\,\psi(x' - y') \\ y &= \tfrac{1}{2}\,\varphi(x' + y') - \tfrac{1}{2}\,\psi(x' - y') \end{aligned} \tag{3'}$$

e l'integrale Ω diventerà una nuova funzione

$$\Omega_1 = F(x' + y') + G(x' - y')$$

che soddisferà ad un'equazione simile alla (1), in cui le variabili x, y saranno sostituite dalle x', y'. Perciò la trasformazione (3) dovrà lasciare invariata l'equazione (1). Facendo i calcoli si trova infatti facilmente

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y'^2} = F'(x' + y')\, G'(x' - y') \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right\}.$$

È chiaro poi che tutte le sostituzioni della forma (3) costituiscono un gruppo, in quanto il prodotto di due di tali sostituzioni è sempre riducibile alla stessa forma (3).

Supponiamo ora che le funzioni φ, ψ siano lineari e precisamente poniamo

$$(4) \qquad x + y = a(x' + y') \qquad x - y = \frac{1}{a}(x' - y')$$

ove a è una costante non mai nulla. Questa trasformazione, come è evidente, lascia invariata l'espressione $x^2 - y^2$, e si ha quindi

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2.$$

Perciò concludiamo subito che la (4) non è altro che la trasformazione di Lorentz, che si presenta così come un caso specialissimo delle trasformazioni rappresentate dalle formole (3). È ben noto del resto che la trasformazione di Lorentz lascia invariata la equazione (1).

Un altro modo molto semplice per arrivare a questa trasformazione è il seguente. Nella trasformazione ortogonale (rotazione di un angolo ω)

$$x + iy = (x' + iy')\, e^{i\omega}$$

scambiamo fra loro y, y', cioè poniamo

$$x + iy' = (x' + iy)\, e^{i\omega}$$

e avremo anche in questo caso

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2.$$

Ma noi ci atterremo alla forma (4), dalla quale si ha subito

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) x' + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) y'$$

$$y = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right) x' + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) y'.$$

Per ritrovare una delle forme più consuete della trasformazione di Lorentz basta porre

$$\lambda = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \qquad -1 < \lambda < 1$$

e si ha subito

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1-\lambda^2}} \qquad y = \frac{\lambda x'}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{y'}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Risulta così che alla trasformazione di Lorentz si può giungere con considerazioni assai semplici, che nulla hanno a che fare con i moderni concetti della relatività, e si connettono invece naturalmente colle proprietà degli integrali dell'equazione delle onde piane. Si presenta così spontanea la domanda: *quale è il significato di questa trasformazione nella ordinaria meccanica newtoniana?*

Ora una quistione di tal fatta è già stata risolta, molto tempo prima che si parlasse di relatività, in una Memoria di Voigt del 1887 (1), nella quale viene studiato e risolto il problema della propagazione delle onde, provenienti da sorgenti che si muovono uniformemente in linea retta e vien data una dimostrazione del principio di Doppler. E lo strumento di cui l'autore si serve è appunto una trasformazione lineare, che si riduce subito a quella di Lorentz (2). Questa Memoria non è generalmente citata nei trattati sulla relatività; vi si accenna incidentalmente nella *Relativitätstheorie* di Pauli, contenuta nella Enciclopedia delle Scienze matematiche (vol. V, 2, fasc. 4°).

La priorità del Voigt è stata riconosciuta recentissimamente dal Lorentz stesso (Acta math. 38 pag. 295), e sarebbe quindi giusto che il nome del Voigt fosse almeno associato a quello di Lorentz nella denominazione della ormai celebre trasformazione.

Per dare un'idea del procedimento di Voigt, consideriamo l'integrale corrispondente ad un sistema di onde sferiche partenti dall'origine delle coordinate, in uno spazio S,

$$\Omega = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(1) W. Voigt, *Ueber das Doppler'sche Princip*. Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 10 Marz 1887.

(2) La trasformazione di Voigt è la seguente:

$$\xi = x - kt \qquad \tau = t - \frac{k}{\omega^2} x$$

da cui si ricava

$$\xi^2 - \omega^2 \tau^2 = \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2}\right)(x^2 - \omega^2 t^2).$$

Ponendo quindi

$$\xi = \xi' \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}} \qquad \tau = \tau' \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}}$$

si ha

$$\xi'^2 - \omega^2 \tau'^2 = x^2 - \omega^2 t^2.$$

che soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0 . \tag{5}$$

Se alla trasformazione di Lorentz associamo l'altra

$$y = y' \qquad z = z' \tag{6}$$

otteniamo nello spazio S' delle variabili x', y', z', t' un nuovo integrale della equazione trasformata della (5) (che rimane inalterata di forma) nel quale il centro luminoso, o sonoro, anzichè fisso nella origine delle coordinate, si troverà nel punto

$$x' + \lambda c t' = 0 \qquad y' = 0 \qquad z' = 0$$

e si muove perciò nella direzione negativa dell'asse delle x con velocità costante λc.

Il nuovo integrale dà quindi la propagazione delle onde, quando la sorgente si muove di moto uniforme in una certa direzione, o l'osservatore si muove in quella opposta.

È questo il concetto fondamentale di Voigt. È chiaro allora che tutte le proprietà che nella teoria della relatività risultano dalla trasformazione lorentziana, sono generalmente suscettibili di una interpretazione, analoga alla precedente, di carattere nettamente newtoniano. E che per conseguenza qualunque eventuale verifica sperimentale di tali proprietà non potrà in via generale essere citata come decisiva a favore dell'una piuttosto che dell'altra interpretazione.

Così la formola

$$v = \frac{v' + \lambda c}{1 + \frac{\lambda}{c} v'} \qquad \text{dove} \quad v = \frac{dx}{dt} \; , \; v' = \frac{dx'}{dt'}$$

che risulta dalla trasformazione di Lorentz e che è considerata come base della cinematica relativistica, non è altro, nella interpretazione newtoniana, che la formola che lega tra loro le velocità nei punti corrispondenti degli spazi S , S'. Lo stesso dicasi per le formole dell'accelerazione.

II.

Poichè la trasformazione di Lorentz non è che un caso speciale della trasformazione (3), è chiaro che molte delle precedenti considerazioni potranno essere estese prendendo per base quella trasformazione più generale.

Cominciamo intanto ad osservare che una trasformazione lineare, più generale della (4), si ha ponendo

$$x + y = a(x' + y') \qquad x - y = b(x' - y')$$

ove b è una nuova costante. Anche queste trasformazioni costituiscono un gruppo. Il prodotto di due trasformazioni ha per parametri a, b i prodotti dei parametri delle due trasformazioni componenti. Poniamo ora

$$b = -\frac{1}{a} \qquad a > 1 .$$

Avremo la trasformazione

$$x + y = a(x' - y) \qquad x - y = -\frac{1}{a}(x' - y')$$

la quale, se si pone

$$\lambda = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \qquad \lambda > 1 ,$$

diviene

$$x = \frac{x'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \qquad y = \frac{\lambda y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \frac{y'}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

analoga a quella di Lorentz, ma in cui il parametro λ deve essere maggiore dell'unità. L'interpretazione newtoniana di questa trasformazione porta alla soluzione del problema della propagazione delle onde piane, quando la sorgente, o l'osservatore, si muove con velocità in valore assoluto *maggiore di quella della luce*, poichè abbiamo pel piano $x = 0$ nello spazio S' la equazione

$$x' + \lambda c t' = 0 .$$

Se chiamiamo u questa velocità, abbiamo

$$\lambda = \frac{u}{c}$$

e poichè $\lambda > 1$, una teoria, analoga a quella della relatività, basata sulle formole precedenti dovrebbe porre il postulato che *qualunque corpo si muove con velocità superiore a quella della luce*.

A questa trasformazione però non possiamo associare le (6), quando si voglia conservare l'equazione generale delle vibrazioni (5). Dovremmo porre invece

$$y = iy' \qquad z = iz'$$

e avremmo allora

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) .$$

La presenza dell'immaginario porterebbe in generale a due nuovi integrali dell'equazione (5), costituiti della parte reale e della parte immaginaria della funzione trasformata.

Prendendo a base di considerazioni analoghe alle precedenti la trasformazione generale (3), e limitandoci necessariamente al caso delle onde piane, saremmo condotti a considerare, nella interpretazione newtoniana, il problema della propagazione nel caso in cui il piano sorgente delle onde si muova con una legge determinata da un'equazione della forma

$$\varphi(x' + ct') + \psi(x' - ct') = 0$$

dove φ, ψ sono funzioni arbitrarie. Il movimento avviene quindi ancora nella direzione x, ma con una velocità non più necessariamente costante, e che può variare in infiniti modi. La corrispondente teoria relativistica dovrebbe porre il postulato della indipendenza della velocità di propagazione della luce da un movimento della sorgente rettilineo, ma non più uniforme.

Per quanto ovvie possano apparire le considerazioni svolte in questa Nota, mi è sembrato che potessero presentare un certo interesse per collocare nella sua giusta luce, dal punto di vista meccanico-analitico, la trasformazione di Lorentz, fulcro iniziale di tutta la relatività; come anche mi è sembrato potessero portare qualche contributo a quella critica delle teorie relativiste che sembra ora così opportunamente iniziata.

Fisico-chimica. — *Modalità sulla trazione del nichel e dell'acciaio* (1). Nota del Socio M. CANTONE.

In occasione di ricerche da me eseguite sulla tenacità (2) ebbi modo di rilevare alcune anomalie nel comportamento del nichel ricotto e dell'acciaio crudo cimentati per trazione, anomalie che credetti meritevoli di particolare esame: a tale studio si riferisce appunto la presente Nota.

La disposizione sperimentale da me adottata si discosta alquanto da quelle che ordinariamente si attuano, perchè, avendo di mira la valutazione del carico di rottura, interessava assicurarsi che i legami agli estremi dei fili cimentati non ne alterassero l'uniformità di struttura o di sezione, e pertanto ricorsi al ripiego di adattare la parte media del filo in esame alla gola di una puleggina mobile, e di fermare con viti i capi del filo sopra un cilindro fisso soprastante di ugual diametro, dopo aver fatto compiere un giro sul cilindro stesso a ciascuna delle parti terminali, onde risultavano due tratti paralleli alla distanza di 16 mm. col semplice legame di forte adesione al cilindro fisso ed alla gola della puleggina. I moti di oscillazione di quest'ultima vennero soppressi mediante opportune guide, epperò queste la lasciavano libera di spostarsi verticalmente per l'azione del peso tensore,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico dell'Università di Napoli.

(2) I risultati di queste ricerche saranno esposti negli Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli.