ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota I del Corrispondente Luigi Berzolari.

In un lavoro, di prossima pubblicazione, *Sulle cubiche gobbe invarianti simultanee rispetto ad un gruppo ottaedrico di collineazioni quaternarie*, mi si è presentato un particolare complesso del quarto grado, il quale gode della proprietà che tutti i suoi coni hanno carattere lemniscatico, cioè sono dotati di tre generatrici ad un tempo doppie e d'inflessione. Il complesso risulta determinato, e può generarsi direttamente in modo assai semplice, quando sian dati tre complessi lineari a due a due in involuzione.

In questa Nota e nelle successive espongo, insieme con tale generazione, quelle proprietà del complesso che hanno maggior legame col lavoro cui ho accennato; inoltre alcune osservazioni generali sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due involutorii. Figura tra essi un altro complesso del quarto grado, che pure ammette una semplice generazione geometrica.

1. Com'è noto, le equazioni di tre complessi lineari K_1, K_2, K_3 a due a due in involuzione si possono scrivere, in coordinate p_{ik} di Cayley-Plücker, sotto la forma

$$(1)\quad K_1 \equiv p_{12} - p_{34} = 0\ ,\ K_2 \equiv p_{31} - p_{24} = 0\ ,\ K_3 \equiv i(p_{31} + p_{24}) = 0\ ,$$

nell'ultima delle quali il fattore $i (= \sqrt{-1})$ è posto per la simmetria di alcune tra le formole che seguiranno.

Le rette comuni ai tre complessi costituiscono un regolo S della quadrica Q che ha per equazione locale

$$(2)\qquad Q \equiv x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0\ ,$$

e per equazione in coordinate di rette tangenti

$$(3)\qquad K \equiv K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 0\ .$$

Le coppie di direttrici $d_1 d'_1$, $d_2 d'_2$, $d_3 d'_3$ delle congruenze lineari, in cui ordinatamente si tagliano K_2 e K_3, K_3 e K_1, K_1 e K_2, appartengono all'altro regolo S′ di Q, e in esso si separano a due a due armonicamente.

Una generatrice qualunque di S' ha equazioni della forma

$$(4) \qquad x_1 - \lambda x_4 = 0 \quad , \quad \lambda x_2 - x_3 = 0 \,,$$

dove λ è un parametro. In particolare, le $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ possono rispettivamente rappresentarsi con le equazioni

$$(5) \left\{ \begin{array}{llll} x_2 = 0 \,, & x_4 = 0 \,; & x_1 = 0 \,, & x_3 = 0 \,; \\ x_2 - x_3 = 0 \,, & x_1 - x_4 = 0 \,; & x_2 + x_3 = 0 \,, & x_1 + x_4 = 0 \,; \\ x_2 - i x_3 = 0 \,, & x_1 + i x_4 = 0 \,; & x_2 + i x_3 = 0 \,, & x_1 - i x_4 = 0 \,. \end{array} \right.$$

La polarità rispetto a Q è permutabile con ciascuna delle polarità nulle

$$(8) \left\{ \begin{array}{ll} (i+1)\, x_1 + (1+\sqrt{3})\, x_4 = 0 \,, & (i-1)\, x_2 + (1-\sqrt{3})\, x_3 = 0 \,; \\ (i-1)\, x_1 - (1-\sqrt{3})\, x_4 = 0 \,, & (i+1)\, x_2 - (1+\sqrt{3})\, x_3 = 0 \,; \\ (i-1)\, x_1 + (1-\sqrt{3})\, x_4 = 0 \,, & (i+1)\, x_2 + (1+\sqrt{3})\, x_3 = 0 \,; \\ (i+1)\, x_1 - (1+\sqrt{3})\, x_4 = 0 \,, & (i-1)\, x_2 - (1-\sqrt{3})\, x_3 = 0 \,, \end{array} \right.$$

e le e_1', e_2', e_3', e_4' con quelle che si deducono dalle precedenti cambiando segno a $\sqrt{3}$.

3. Ciò posto, in questo numero e nei due successivi conviene, per il seguito, premettere alcune osservazioni a proposito di certe quadriche, che restano determinate ogniqualvolta con i complessi K_1, K_2, K_3 sia assegnata anche una retta r.

Anzitutto, le reciproche di r rispetto ai complessi della rete individuata da K_1, K_2, K_3 formano una congruenza lineare passante per r, di cui sono direttrici le due rette di S appoggiate alla stessa r. Se dunque si costruiscono le reciproche di r rispetto a K_1, K_2, K_3, la quadrica R da esse determinata (che si dirà *quadrica corrispondente ad* r) incontrerà Q secondo due generatrici di S e due di S'.

Dicendo p_{ik} le coordinate di r, si trova che la quadrica è rappresentata da

$$(9) \quad \begin{aligned} R \equiv (p_{12} - p_{34})\,(p_{23}\, p_{31}\, x_1^2 + p_{14}\, p_{24}\, x_2^2 - p_{31}\, p_{14}\, x_3^2 - p_{23}\, p_{24}\, x_4^2) \\ + (p_{12}^2 - p_{34}^2)\,(p_{31}\, x_3\, x_1 - p_{24}\, x_2\, x_4) \\ + (p_{31}^2 - p_{24}^2)\,(p_{14}\, x_2\, x_3 - p_{34}\, x_1\, x_2 - p_{23}\, x_1\, x_4 - p_{12}\, x_3\, x_4) = 0 \,. \end{aligned}$$

In luogo di r considerando la sua reciproca r' rispetto a Q, la quadrica R' ad essa corrispondente ha un'equazione $R' = 0$, che si deduce dalla precedente scambiando tra loro p_{12} e p_{34} nel quadrinomio per il quale è moltiplicata la differenza $p_{31}^2 - p_{24}^2$ (¹). Ne segue l'identità

$$R - R' = (p_{12} - p_{34})\,(p_{31}^2 - p_{24}^2)\, Q \,,$$

(¹) Per un'osservazione fatta al n. 1, le rette reciproche di r' rispetto a K_1, K_2, K_3 sono altresì le coniugate di r nelle involuzioni rigate che hanno per assi $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$.

epperò:

Le quadriche R, R′ *corrispondenti a due rette* r, r' *reciproche rispetto a* Q *si tagliano in un quadrilatero, determinando un fascio-schiera al quale appartiene* Q.

4. Essendo ancora r una retta di coordinate p_{ik}, le quadriche A_1, A_2, A_3 passanti per r e risp. per le coppie di rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ tagliano ulteriormente Q nelle due generatrici di S che si appoggiano ad r, e sono altresì i luoghi delle rette reciproche di r rispetto ai complessi lineari dei fasci determinati da K_2 e K_3, K_3 e K_1, K_1 e K_2. Esse hanno per equazioni

$$A_1 \equiv -2(p_{34}\, x_1 x_2 - p_{14}\, x_2 x_3 + p_{23}\, x_1 x_4 + p_{12}\, x_3 x_4) = 0\,,$$

$$A_2 \equiv p_{23}\, x_1^2 + p_{14}\, x_2^2 - p_{14}\, x_3^2 - p_{23}\, x_4^2 + (p_{31} - p_{24})\,(x_1 x_2 - x_3 x_4) + (p_{12} + p_{34})\,(x_1 x_3 - x_2 x_4) = 0\,,$$

determinate da K_1, K_2, K_3, ed i suoi prodotti per queste sono rispettivamente le involuzioni rigate che hanno per assi le coppie di rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$.

2. Assumendo S′ come campo binario, risulta in esso determinata una *involuzione sizigetica* J, della quale $d_i d_i'$ sono gli elementi doppi, e che ha l'equazione

$$\lambda^4 + 6\varrho\lambda^2 + 1 = 0\,, \tag{6}$$

dove λ è il parametro che entra nelle equazioni (4) d'una generatrice di S′, e ϱ è un altro parametro, da cui sono determinati i singoli gruppi dell'involuzione.

Appartengono a questa tre gruppi armonici $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_1' a_2' a_3' a_4'$, $a_1'' a_2'' a_3'' a_4''$, e due gruppi equianarmonici $e_1 e_2 e_3 e_4$, $e_1' e_2' e_3' e_4'$.

Convenendo che i tre primi siano rispettivamente *coordinati* alle coppie $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$, nel senso che queste in S′ separino armonicamente le due coppie di generatrici coniugate in quei gruppi armonici, le generatrici di tali gruppi si possono rappresentare con le equazioni

$$\tag{7} \begin{cases} \pm\sqrt{2}\, x_1 + (i-1)\, x_4 = 0\,, & \pm\sqrt{2}\, x_2 - (i+1)\, x_3 = 0\,; \\ \pm\sqrt{2}\, x_1 + (i+1)\, x_4 = 0\,, & \pm\sqrt{2}\, x_2 - (i-1)\, x_3 = 0\,; \end{cases}$$
$$\begin{cases} i\,x_1 - (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & i\,x_2 - (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,; \\ i\,x_1 + (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & i\,x_2 + (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 - (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & x_2 + (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,; \\ x_1 + (1 \pm \sqrt{2})\, x_4 = 0\,, & x_2 - (1 \mp \sqrt{2})\, x_3 = 0\,, \end{cases}$$

dove due generatrici coniugate d'un gruppo armonico si ottengono scegliendo, nelle rispettive equazioni, una volta i segni superiori e un'altra i segni inferiori.

Per i due gruppi equianarmonici si riterrà che le generatrici e_i ed e'_i $(i=1,2,3,4)$ siano tra loro *omologhe* secondo una proprietà che recentemente ho rilevata (¹). Le rette e_1, e_2, e_3, e_4 si possono allora rappresentare con le equazioni

$$\begin{aligned} A_3 \equiv i\,[p_{23}\,x_1^2 - p_{14}\,x_2^2 - p_{14}\,x_3^2 + p_{23}\,x_4^2 + (p_{31}+p_{24})\,(x_1 x_2 - x_3 x_4) \\ + (p_{12}+p_{34})\,(x_1 x_3 + x_2 x_4)] = 0\,. \end{aligned}$$

Se al posto di r si assume la sua reciproca r' rispetto a Q, si ottengono similmente tre quadriche A'_1, A'_2, A'_3, le cui equazioni si deducono dalle precedenti scambiando tra loro p_{12} e p_{34} e inoltre, nella seconda e terza equazione, mutando segno al termine contenente la differenza $x_1 x_2 - x_3 x_4$. Si hanno quindi le identità

$$\begin{aligned} A_1 - A'_1 &= 2(p_{12} - p_{34})\,Q\,, \\ A_2 - A'_2 &= 2(p_{31} - p_{24})\,Q\,, \\ A_3 - A'_3 &= 2i(p_{31} + p_{24})\,Q\,, \end{aligned}$$

donde segue che *le quadriche* A_1 *e* A'_1, A_2 *e* A'_2, A_3 *e* A'_3 *determinano tre fasci-schiere, che tutti contengono* Q.

La rete individuata da A_1, A_2, A_3 ha per basi la retta r e le due generatrici di S appoggiate ad r (e ad r').

Quattro altre quadriche $F_1, \ldots, F_4$ della stessa rete sono quelle passanti per r e per le coppie di rette $e_1 e'_1, \ldots, e_4 e'_4$, ed hanno le equazioni

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv -A_1 + A_2 + A_3 = 0\,, & F_2 &\equiv A_1 - A_2 + A_3 = 0\,, \\ F_3 &\equiv A_1 + A_2 - A_3 = 0\,, & F_4 &\equiv A_1 + A_2 + A_3 = 0\,. \end{aligned}$$

5. Quando r, e perciò anche r', sta in K_i, e in questo caso soltanto, le R, R', A_i e A'_i $(i=1,2,3)$ coincidono, dando luogo ad una quadrica che, come luogo e come inviluppo, è apolare a Q. Se, ad es., r ed r' stanno

(¹) Ved. la mia Nota *Sulle forme binarie del quarto ordine*, Rend. del R. Istituto Lombardo, serie II, vol. 54 (1921), p 225. La proprietà consiste in ciò, che tra gli elementi dei due gruppi equianarmonici contenuti in un'involuzione sizigetica si può, in un modo solo, stabilire una corrispondenza biunivoca tale, che ogni elemento dell'un gruppo e i tre non omologhi dell'altro costituiscono alla loro volta un gruppo equianarmonico. Sono così otto i nuovi gruppi equianarmonici che si possono costruire con gli elementi dei due gruppi considerati.

Di due elementi omologhi, ognuno è pure il gruppo polare di prim'ordine dell'altro rispetto alla sestupla degli elementi doppi dell'involuzione. Due tali elementi omologhi sono inoltre uniti per una delle otto omografie cicliche a periodo 3 (a due a due inverse) appartenenti al gruppo ottaedrico delle omografie che trasformano la detta sestupla in sè.

in K_1, le due coppie di piani del fascio-schiera determinato da tale quadrica e da Q sono rappresentate da

$$R \pm Q(p_{31}^2 - p_{24}^2)\sqrt{-p_{31}p_{24}} = 0,$$

cosicchè, entro il fascio, separano armonicamente R e Q [1].

Una retta che appartenga ad uno dei complessi K_1, K_2, K_3 è inoltre tale che incontra Q e la quadrica corrispondente in due coppie armoniche di punti. Lo stesso avviene di ogni retta r tangente a Q, in quanto essa tocca nello stesso punto anche la quadrica corrispondente. Infatti, dicendo y il punto di contatto di r con Q, la quadrica corrispondente ad r ha in comune con Q due generatrici di S' (tra loro distinte, a meno che y non giaccia sopra una delle rette e_i, e'_i) e la generatrice di S uscente da y, contata due volte. Nè vi sono altre rette che godano della proprietà indicata; in altri termini:

Tutte e sole le rette dei complessi K_1, K_2, K_3 *e quelle tangenti alla quadrica* Q *hanno la proprietà d'incontrare* Q *e la quadrica corrispondente in due coppie armoniche di punti.*

Se invece r, e quindi anche r', incontra una delle rette d_i, d'_i, e solamente in questo caso, ognuna delle R, R', A_i, A'_i si scompone in due piani. Di tali piani, uno fa parte di R e di A_i, un altro fa parte di R' e di A'_i, e gli altri due piani di cui constano R ed A_i, come pure gli altri due di cui constano R' ed A'_i, incontrano l'altra delle d_i, d'_i in uno stesso punto. Se infatti r ed r' tagliano, per es., d'_1, sicchè $p_{31} = 0$, e si pone

$$\alpha = p_{23}x_1 + p_{12}x_3 \quad , \quad \beta = p_{14}x_2 - p_{12}x_4 ,$$

$$\alpha' = p_{23}x_1 + p_{34}x_3 \quad , \quad \beta' = p_{14}x_2 - p_{34}x_4 ,$$

si ha, a meno di fattori costanti,

$$A_1 = \alpha\beta \quad , \quad A'_1 = \alpha'\beta' ,$$

$$R = \beta\,[p_{14}p_{24}\alpha - p_{12}(p_{12} - p_{34})\beta'] ,$$

$$R' = \beta'\,[p_{12}p_{24}\alpha' + p_{23}(p_{12} - p_{34})\beta] .$$

[1] Ciascuna delle R e Q è polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra. Le due quadriche sono pertanto, secondo la denominazione di R. Sturm, *harmonisch-zugeordnet mit Vierseits-Durchschnitt*: cfr., anche per citazioni, la mia Nota *Sul significato geometrico di alcune identità lineari tra quadrati di forme algebriche*, Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 51 (1918), p. 431.