ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

giallo-chiara. Dall'alcool cristallizza in minute pagliuzze verdastre. Fonde nettamente a 125°.

I. Gr. 0,1127 di sostanza dettero, a 11° e 758 mm., cc³. 15,3 di N.

II. Gr. 0,0608 di sostanza dettero, a 11°,5 e 750 mm., cc³. 8,3 di N.

III. Gr. 0,1572 di sostanza dettero gr. 0,0528 di H_2O e gr. 0,3223 di CO_2.

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $C_{12}H_9O_4N_2$
C	—	—	55,93 %	55,58 %
H	—	—	3,75 %	3,5 %
N	16,26 %	16,19 %	—	16,22 %

Nitrodiossiazossibenzolo ottenuto dal p-p'-diossiazossibenzolo:

$$HO\,.\,C_6H_4\,.\underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{N}=N\,.\,C_6H_3<\begin{matrix}NO_2\,(2)\\ OH\;\;(1)\end{matrix}.\quad(4)$$

Aghi giallo-rossastri brillanti dall'alcool diluito 60 %, minute pagliuzze rossastre dall'alcool concentrato, che dànno una polvere aranciata. Fonde, con forte decomposizione, a 193°.

Gr. 0,1376 di sostanza dettero, a 12° e 745,5 mm., cc³. 17,92 di N.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_9O_5N_3$
N	15,30 %	15,27 %

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione*. Nota II del Corrispond. LUIGI BERZOLARI.

6. Consideriamo una generatrice del regolo S', e tra le sue equazioni (4) e la (6) eliminiamo x_1 e x_3. Scrivendo che l'equazione risultante è identicamente soddisfatta rispetto ad x_2 e x_4, si ottiene per λ l'unica equazione quadratica

$$p_{31}(p_{12}-p_{34})\,\lambda^2-(p_{31}^2-p_{24}^2)\,\lambda-p_{24}(p_{12}-p_{34})=0\,, \tag{10}$$

il cui discriminante, eguagliato a zero, dà

$$(p_{31}^2-p_{24}^2)^2+4\,p_{31}\,p_{24}\,(p_{12}-p_{34})^2=0\,, \tag{11}$$

ossia

$$\Theta\equiv K_2^2\,K_3^2+K_3^2\,K_1^2+K_1^2\,K_2^2=0\,. \tag{11'}$$

Si ha così il teorema:

La quadrica corrispondente ad una retta generica dello spazio incontra la quadrica Q lungo due generatrici del regolo S e due del regolo S'. Il luogo delle rette, le cui quadriche corrispondenti passano per due generatrici di S' tra loro coincidenti è il complesso Θ di quarto grado, rappresentato dall'equazione (11') (1).

7. Lo studio dei coni del complesso Θ è strettamente collegato con la considerazione di altri complessi di primo e secondo grado, che pure risultano determinati dai dati complessi K_1, K_2, K_3.

Anzitutto osserviamo che le generatrici di S' segnano sulle coppie di rette $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$ altrettante omografie, e i luoghi delle rette da cui queste vengono proiettate secondo fasci involutori sono risp. i quattro complessi lineari $L_1, \dots, L_4$ (2) aventi le equazioni

$$L_1 \equiv -K_1 + K_2 + K_3 = 0 \ , \ L_2 \equiv K_1 - K_2 + K_3 = 0 \ ,$$
$$L_3 \equiv K_1 + K_2 - K_3 = 0 \ , \ L_4 \equiv K_1 + K_2 + K_3 = 0 \ .$$

I medesimi complessi sono pure risp. i luoghi delle ∞^1 congruenze lineari che hanno per direttrici due rette di S' separate armonicamente da $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$.

Essi appartengono alla rete individuata da K_1, K_2, K_3, ma non sono in involuzione nè con questi nè tra loro.

La polarità rispetto a Q e la polarità nulla determinata da L_i sono permutabili, ed hanno per prodotto l'involuzione rigata di assi $e_i e'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

In secondo luogo, si considerino le quattro quadriche $F_1, \dots, F_4$ determinate (n. 4) da una retta r con le coppie di rette $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$; dicasi y $(y_1, \dots, y_4)$ un loro punto comune giacente su r, e si denotino ancora con K_1, K_2, K_3 i risultati che si ottengono sostituendo nei primi membri delle (1), al posto delle coordinate correnti, le coordinate di r. Sussiste l'identità

$$K_1 \sum_1^4{}_i\, y_i \frac{\partial A_1}{\partial x_i} + K_2 \sum_1^4{}_i\, y_i \frac{\partial A_2}{\partial x_i} + K_3 \sum_1^4{}_i\, y_i \frac{\partial A_3}{\partial x_i} = 0 \ ,$$

col mezzo della quale, se si rappresentano con $(F_1) = 0, \dots, (F_4) = 0$ i piani tangenti in y a $F_1 = 0, \dots, F_4 = 0$, si riconosce che si può porre

$$(F_3) \equiv (K_2 + K_3)(F_1) + (K_1 + K_3)(F_2) \ ,$$
$$(F_4) \equiv (K_1 - K_3)(F_1) + (K_2 - K_3)(F_2) \ .$$

(1) Perchè invece coincidano le generatrici di S contenute nella quadrica corrispondente ad una retta, è ovvio esser necessario e sufficiente che questa retta sia tangente a Q.

(2) Cfr. la mia Nota citata *Sul significato geometrico*, ...

Se ne deduce la proprietà:

Se in un punto qualunque di r si conducono i piani tangenti alle quadriche $F_1, \dots, F_4$, il loro birapporto non dipende dal punto, ma soltanto dalla retta r.

Inoltre:

Il luogo delle rette r, per le quali il gruppo dei quattro piani tangenti è armonico, è formato dai tre complessi di secondo grado

$$H_1 \equiv K_2^2 + K_3^2 - 2K_1^2 = 0 \ , \ H_2 \equiv K_3^2 + K_1^2 - 2K_2^2 = 0 \ ,$$
$$H_3 \equiv K_1^2 + K_2^2 - 2K_3^2 = 0 \ ,$$

e, denotando con ε una radice cubica imaginaria dell'unità:

Il luogo delle rette r, per le quali il gruppo dei quattro piani tangenti è equianarmonico, consta dei due complessi di secondo grado

$$K' \equiv K_1^2 + \varepsilon^2 K_2^2 + \varepsilon K_3^2 = 0 \ , \ K'' \equiv K_1^2 + \varepsilon K_2^2 + \varepsilon^2 K_3^2 = 0 \, .$$

8. Le equazioni dei cinque complessi quadratici del num. precedente mostrano che questi hanno per rette doppie tutte le generatrici di S.

Ciascuno dei complessi H_1, H_2, H_3 ha inoltre per rette doppie risp. le coppie di generatrici $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ di S': infatti per es. il cono di H_1 che ha per vertice un punto y di d_1 si riduce al piano tangente in y a Q, contato due volte.

Per una nota regola [1], le rette singolari, ad es., di H_1 si ottengono dalle equazioni

$$(p_{12} - p_{34})^2 = 0 \ , \ p_{31} p_{24} = 0 \, .$$

Sicchè le rette singolari dei complessi H_1, H_2, H_3 costituiscono le congruenze lineari speciali (ognuna contata due volte) aventi per direttrici risp. le coppie di rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ (ossia le congruenze formate dalle tangenti a Q nei punti di tali rette). I medesimi complessi hanno dunque, nella classificazione di Weiler e di Segre [2], la caratteristica [(111) (11) 1].

I complessi K' e K'' sono entrambi di caratteristica [(111) 111], e posseggono un sistema lineare ∞^2 di complessi lineari fondamentali, cioè tutti quelli che passano per il regolo S', e inoltre tre complessi fondamentali isolati, che sono K_1, K_2, K_3.

Sì per l'uno che per l'altro la congruenza delle rette singolari si scompone nelle quattro congruenze lineari rappresentate dalle coppie di equazioni

$$p_{12} - p_{34} \pm (i-1) p_{24} = 0 \ , \quad p_{31} - i p_{24} = 0 \, ;$$
$$p_{12} - p_{34} \pm (i+1) p_{24} = 0 \ , \quad p_{31} + i p_{24} = 0 \ ,$$

(1) Plücker, *Neue Geometrie des Raumes*, Zweite Abth., herausg. von F. Klein, Leipzig 1869, pag. 296.

(2) Weiler, *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades*, Math. Ann., Bd. 7 (1874), pag. 145; Segre, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, vol. 36 (1885), pag. 87.

ossia in quelle che hanno per direttrici $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$. La quaterna focale consta per K′ delle rette $e_1, \dots, e_4$, per K″ delle $e'_1, \dots, e'_4$ (¹): vale a dire, per es., il cono di K′ avente per vertice un punto di e_i si riduce al piano che dal punto proietta e'_i, contato due volte.

I coni di K′ e K″ aventi il vertice in un punto generico y di Q si spezzano in due coppie armoniche di piani, passanti per la generatrice di S che esce da y.

9. Denotando con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ le espressioni in cui si cangiano i primi membri delle (1) quando si ponga $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, le equazioni $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = 0$ rappresentano i piani focali del punto y $(y_1, \dots, y_4)$ rispetto a K_1, K_2, K_3; e le equazioni

$$\Gamma_2 \pm i\Gamma_3 = 0 \quad , \quad \Gamma_3 \pm i\Gamma_1 = 0 \quad , \quad \Gamma_1 \pm i\Gamma_2 = 0$$

rappresentano i piani che da y proiettano le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$. Perciò dai numeri precedenti e dalle note proprietà della *lemniscata proiettiva* (curva del quart'ordine con tre nodi a tangenti inflessionali) (²) si deduce:

Il cono del complesso Θ *avente il vertice in un punto generico* y *dello spazio ha tre generatrici nodali, che sono le rette condotte per* y *a tagliare le coppie di rette* $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$, *e lungo quelle generatrici ha piani tangenti inflessionali, che sono i piani proiettanti da* y *le coppie stesse di rette.*

I quattro piani bitangenti del cono sono i piani focali di y *rispetto ai complessi lineari* $L_1, \dots, L_4$; *e le otto generatrici di contatto appartengono al cono circoscritto da* y *a* Q.

Gli stessi quattro piani sono le facce di un angolo tetraedro completo, il cui « angolo quadrispigolo associato » ha per spigoli le rette che, partendo da y, *si appoggiano alle coppie di rette* $e_1 e'_1, \dots, e_4 e'_4$.

Il triedro diagonale comune all'angolo tetraedro e all'angolo quadrispigolo ha per spigoli le rette che escono da y *e si appoggiano alle coppie di rette* $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$.

Il cono quadrico invariante dell'angolo tetraedro (rispetto al quale questo è polare reciproco dell'angolo quadrispigolo associato) è il cono circoscritto da y *a* Q.

Il luogo delle rette uscenti da y *e da cui gli spigoli dell'angolo quadrispigolo sono proiettati secondo quattro piani formanti un gruppo armonico, oppure un gruppo equianarmonico, si decompone nei coni di ver-*

(¹) Cfr. su ciò il n. 168 della citata Memoria del Segre, dove sono pure corrette varie inesattezze in cui è incorso il Weiler.

(²) Ved., anche per citazioni, le mie Note: *Sulla lemniscata proiettiva*, Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 37 (1904), pp. 277 e 304; *Sulla polarità rispetto ad un quadrilatero piano completo*, id., Serie II, vol. 49 (1916), pag. 463.

tice y appartenenti, nel primo caso, ai complessi H_1, H_2, H_3, *nel secondo ai complessi* K', K''.

I complessi K' *e* K'' *godono altresì della proprietà che i loro coni di vertice y hanno per piani tangenti tutti e soli i piani che tagliano le facce dell'angolo tetraedro in quattro rette formanti un gruppo equianarmonico.*

Invece l'inviluppo dei piani per y che incontrano le stesse facce in quattro rette armoniche si scompone nei coni di vertice y appartenenti ai tre complessi quadratici

$$-K_1^2 + 2K_2^2 + 2K_3^2 = 0\,,\quad 2K_1^2 - K_2^2 + 2K_3^2 = 0\,,\quad 2K_1^2 + 2K_2^2 - K_3^2 = 0\,.$$

Anche questi tre ultimi complessi sono di caratteristica [(111) (11) 1], ed hanno risp. in comune con H_1, H_2, H_3 le rette singolari e le rette doppie.

Ciascuno degli otto complessi quadratici è trasformato in sè dalla polarità rispetto a Q, come pure dalle polarità nulle dovute a K_1, K_2, K_3.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota I di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. In questa e in successive Note mostrerò che la geometria *proiettivo-differenziale* delle curve piane, fondata da Halphen [1] e sviluppata sistematicamente dal Wilczynski [2], può edificarsi nel modo più rapido e diretto, adoperando il *calcolo differenziale assoluto con una variabile* [3] ed un procedimento che si ispira a quello usato dal Fubini [4] per le varietà V_n di un S_{n+1} con $n > 1$ (quindi con esclusione del caso $n = 1$, di cui mi occupo). E le darò la più completa analogia con la corrispondente teoria metrica, definendo *l'arco* [5], *la curvatura, l'equazione intrinseca, la normale*, ecc., *proiettivi*.

(1) *Oeuvres*, tom. II, p. 195.

(2) *Projective diff. geom. of curves and ruled surfaces*, cap. III (Teubner, Leipzig. 1906).

(3) Che ho dato in una Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LVII, p. 293, ove ho anche ricostruita la geometria *affine differenziale* delle curve piane (e sghembe, in una Nota successiva).

(4) *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, (Rend. Circ. Mat. di Palermo, tom. XLIII).

(5) Già definito da Wilczynsky: *Integral invariants in projective geometry* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. 42, an. 1917, p. 128).