ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

tice y appartenenti, nel primo caso, ai complessi H_1, H_2, H_3, *nel secondo ai complessi* K', K''.

I complessi K' *e* K'' *godono altresì della proprietà che i loro coni di vertice y hanno per piani tangenti tutti e soli i piani che tagliano le facce dell'angolo tetraedro in quattro rette formanti un gruppo equianarmonico.*

Invece l'inviluppo dei piani per y che incontrano le stesse facce in quattro rette armoniche si scompone nei coni di vertice y appartenenti ai tre complessi quadratici

$$-K_1^2+2K_2^2+2K_3^2=0\,,\quad 2K_1^2-K_2^2+2K_3^2=0\,,\quad 2K_1^2+2K_2^2-K_3^2=0\,.$$

Anche questi tre ultimi complessi sono di caratteristica [(111) (11) 1], ed hanno risp. in comune con H_1, H_2, H_3 le rette singolari e le rette doppie.

Ciascuno degli otto complessi quadratici è trasformato in sè dalla polarità rispetto a Q, come pure dalle polarità nulle dovute a K_1, K_2, K_3.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota I di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. In questa e in successive Note mostrerò che la geometria *proiettivo-differenziale* delle curve piane, fondata da Halphen [1] e sviluppata sistematicamente dal Wilczynski [2], può edificarsi nel modo più rapido e diretto, adoperando il *calcolo differenziale assoluto con una variabile* [3] ed un procedimento che si ispira a quello usato dal Fubini [4] per le varietà V_n di un S_{n+1} con $n>1$ (quindi con esclusione del caso $n=1$, di cui mi occupo). E le darò la più completa analogia con la corrispondente teoria metrica, definendo *l'arco* [5], *la curvatura, l'equazione intrinseca, la normale*, ecc., *proiettivi*.

(1) *Oeuvres*, tom. II, p. 195.

(2) *Projective diff. geom. of curves and ruled surfaces*, cap. III (Teubner, Leipzig. 1906).

(3) Che ho dato in una Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LVII, p. 293, ove ho anche ricostruita la geometria *affine differenziale* delle curve piane (e sghembe, in una Nota successiva).

(4) *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, (Rend. Circ. Mat. di Palermo, tom. XLIII).

(5) Già definito da Wilczynsky: *Integral invariants in projective geometry* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. 42, an. 1917, p. 128).

2. Anzitutto riporto da loc. cit. [1] qualche cenno sul calcolo assoluto.

Sia L una legge che faccia corrispondere ad ogni funzione U di una variabile u un'altra U' di una variabile u': dico che L è *legge di covarianza* e che U è *un covariante di ordine* n (ed allora lo indico con U_n) se $U'_n = U_n\,(du : du')^n$ (n intero) per ogni trasformazione invertibile tra u e u'.

Se $n = 0$, L è legge di *invarianza* e $U = U_0$ è un *invariante*.

$U_n + V_n$, $U_n W_m$, $U_n : W_m$ sono covarianti di ordine n, $n + m$, $n - m$.

Se

$$A = a_1\, du \tag{1}$$

è un differenziale primo e ad a_1 si fa corrispondere a'_1, ove $A' = a'_1\, du'$ è il trasformato di A, a_1 è covariante di 1° ordine, quindi a_1^n di ordine n. Lo stesso du è covariante di ordine -1, quindi $V_1\, du$ lo è di ordine 0 (invariante).

L'espressione

$$(2)\quad U_{n+1} = dU_n/du - n\,S\,U_n\,, \qquad \text{ove} \qquad (3)\quad S = da_1/a_1\, du\,,$$

è un covariante di ordine $n + 1$ che chiamo *prima derivata covariante* di U_n rispetto ad A (e che *coincide con l'ordinaria se* $a_1 = cost.$ *o* $n = 0$). *La derivata* a_2 *di* a_1 *rispetto ad* A *è nulla.*

La derivazione covariante si applica ad un covariante U_n, che sia funzione razionale di altri covarianti, *con le regole del calcolo ordinario.*

Applicata nuovamente, dà la *derivata seconda* U_{n+2}, ecc.

Con le derivate covarianti di una funzione U e con a_1 si formano i *parametri differenziali* (1°, 2°, ...) di U (tutti invarianti), $U_1 : a_1$, $U_2 : a_1^2$, ...

3. Una curva piana Γ sia definita dando le coordinate (cartesiane o proiettive) omogenee di un suo punto generico P in funzione di un parametro u:

$$x = x(u)\quad,\quad y = y(u)\quad,\quad z = z(u)\,. \tag{4}$$

Scelto che sia il fattore arbitrario di proporzionalità $h = h(u)$, insito nella definizione di coordinate omogenee, le (4) costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di una ben determinata equazione differenziale

$$f''' + 3\beta f'' + 3\gamma f' + \delta = 0\,. \tag{5}$$

purchè Γ (nell'arco che si considera) *sia priva di flessi* (quindi anche *che non sia una retta*) come sempre supporrò.

Gli altri infiniti sistemi analoghi daranno tutte le curve collineari a Γ.

[1] Ved. nota [3] a pag. prec.

E, viceversa, una equazione del tipo (5) definisce, coi suoi sistemi fondamentali di soluzioni, una curva Γ e le sue collineari o, come suol dirsi, una curva Γ *a meno di una collineazione.*

4. Tutto ciò è ben noto. Ora la (5) può porsi, ed in infiniti modi, *sotto forma invariantiva*, sostituendo alle f', f'', f''' le derivate covarianti rispetto ad un differenziale (1) scelto ad arbitrio. Precisamente, essendo, per la (2),

$$(6) \qquad f' = f_1 \quad , \quad f'' = f_2 + Sf_1 \quad , \quad f''' = f_3 + 3Sf_2 + (S^2 + S')f_1$$
$$(S' = dS : du),$$

la (5) può scriversi

$$(5') \qquad f_3 + 3b_1f_2 + 3c_2f_1 + d_3f = 0 \, ,$$

ove

$$(7) \qquad b_1 = \beta + S \quad , \quad c_2 = \gamma + \beta S + (S^2 + S')/3 \quad , \quad d_3 = \delta \, .$$

Ogni termine di (5′) *è covariante di 3° ordine, perchè* b_1, c_2, d_3 *lo sono degli ordini* 1, 2 e 3 [1]. Ciò risulta dalle loro espressioni mediante le (4):

$$(8) \qquad 3b_1 = -\frac{|x\,x_1\,x_3|}{|x\,x_1\,x_2|}, \quad 3c_2 = \frac{|x\,x_2\,x_3|}{|x\,x_1\,x_2|}, \quad d_3 = -\frac{|x_1\,x_2\,x_3|}{|x\;x_1\,x_2|}\ (^2)$$

che permettono di costruire la (5′) direttamente, anzichè passando per la (5).

I coefficienti di (5′) dipendono non solo da h, come quelli di (5), ma anche da A.

Normalizzando (ossia fissando) h ed A con legge intrinseca ed invariante per coll., perverremo ad un'equazione *normale*, che sarà in corrispondenza biunivoca con Γ (e le sue collineari).

Anzitutto, se si pone

$$(9) \qquad f = \lambda\varphi \quad \text{con} \quad (10) \quad \lambda = e^{-\int b_1 du} = e^{-\int \beta du} : a_1 \, ,$$

la (5′) si trasforma nell'altra

$$(11) \qquad \varphi_3 + 3\,p_2\,\varphi_1 + q_3\,\varphi = 0$$

i cui coefficienti valgono (come si vede con facile calcolo)

$$(12) \qquad p_2 = c_2 - b_1^2 - b_2 \quad , \quad q_3 = d_3 - 3b_1c_2 + 2b_1^3 - b_3$$

[1] Sicchè, per eseguire una trasformazione $u = u(u')$, basta sostituire $u(u')$ ad u nei coefficienti ed interpretare le f_1, f_2, f_3 come derivate covarianti rispetto ad A′ trasformato di A.

[2] Con $|x_r\,x_s\,x_t|$ indico il determinante di 3° ordine le cui rimanenti orizzontali si deducono dalla prima (quella scritta) cambiandovi x in y o in z; *esso è covariante di ordine* $r + s + t$. Si noti che, per le (6), $|x\,x_1\,x_2| = |x\,x'\,x''|$ ed è perciò *indipendente da* A *e diverso da zero*; esso è un primo *invariante relativo* di (5) o (5′).

e sono covarianti di ordine 2 e 3 rispetto ad A *che dipendono solo da* A [1].

Per vedere come variano variando A, confrontiamo la (11) con quella che corrisponde al particolare $A = du$: sia

$$\psi''' + 3\pi\psi' + \chi\psi = 0 . \tag{13}$$

Poichè questa non è che una delle infinite forme che può assumere la (5) variando il fattore h, si deve poterla trasformare nella (11), operando su di essa come si è fatto con la (5): si trova così anzitutto un'equazione del tipo (5′) con

$$b_1 = S \quad c_2 = \pi + (S^2 + S')/3 \quad , \quad d_3 = \chi , \tag{14}$$

giusta le (7); e poi la (11), ove, per le (12), sarà

$$p_2 = \pi + (S^2 - 2S')/3 \quad , \quad q_3 = \chi - 3S\pi + 3SS' - S'' - S^3 \ [2]. \tag{15}$$

Le (15) *mostrano come variano* p_2 e q_3 *in* (11) *variando* A (*quindi* S).

È importante la relazione $q_3 - 3p_3/2 = \chi - 3\pi'/2$ che se ne deduce eliminando S [3]; perchè essendo i due membri formati *con la stessa legge*, ma rispettivamente con i coefficienti di (11) ed A e coi coefficienti di (13) e du, prova che

$$\theta_3 = q_3 - 3p_3/2 = \chi - 3\pi'/2 \tag{16}$$

è un covariante di 3° ordine indipendente da A [4].

Dunque, *se* $\theta_3 \neq 0$ *lungo l'arco di* Γ *considerato* [5], potremo normalizzare A assumendo

$$A = a_1\, du \quad \text{con} \quad a_1 = \sqrt{\theta_3} . \tag{17}$$

La corrispondente (11) sarà la richiesta *equazione normale*. Un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito dalle coordinate omogenee

(1) *E non più da h*. Poichè se le (11), corrispondenti a due scelte diverse h', h'' di h, fossero distinte, dovrebbero potersi dedurre l'una dall'altra con una trasformazione del tipo (9) (con $\lambda = h' : h''$ o $h'' : h'$); e ciò è impossibile, perchè per ogni trasformazione (9) la (11) perde la sua forma caratteristica (mancanza del termine in φ_2). A meno che sia $\lambda =$ costante; ma in tal caso, come risulta dalle (7), i coefficienti di (11) non mutano.

(2) Si tenga presente che, per la (2), si ha successivamente $b_2 = b_1 - Sb_1 = S' - S^2$, $b_3 = b_2' - 2Sb_2 = (S'' - 2SS') - 2S(S' - S^2) = S'' - 4SS' + 2S^3$.

(3) E precisamente tra la 2ª e la $p_3 = p_2' - 2Sp_2 = \pi' - 3S\pi + 2\,(3SS' - S'' - S^3)/3$, che si ottiene dalla 1ª derivando covariantemente rispetto ad A.

(4) E un secondo, cfr. (6), *invariante relativo* di (5) o (5′) (Laguerre).

(5) *E così supporremo sempre da ora innanzi*. Con ciò *si esclude che* Γ *sia una conica*, perchè *solo nelle coniche è* $\theta_3 = 0$ *identicamente* (Laguerre). Infatti, supposto $\theta_3 = 0$, scegliamo un $A = a_1\, du$ tale che risulti $p_2 = 0$, il che, per le (15), equivale a scegliere un S che soddisfi l'equazione di Riccati $2S' - S^2 - 3\pi = 0$. Allora risulterà $q_3 = \theta_3 = 0$ e la (11) diventerà $\varphi_3 = 0$, e poi $\varphi''' = 0$ se si cambia la u col porre $a_1\, du = dv$. Ora questa ha il sistema fondamentale $x = v^2$, $y = v$, $z = 1$ che definisce una conica.

x, y, z di P, *ma col fattore h fissato* [1] *in modo intrinseco ed invariante per coll.*: le dirò *coordinate normali* di P.

5. La funzione $\sigma(u)$ il cui differenziale è (17) è l'*arco proiettivo* di Γ, nel senso che $\sigma(u) - \sigma(u_0)$ è la *lunghezza proiettiva* dell'arco di Γ limitato dai punti $P_0(u_0)$ e $P(u)$ (Wilczynski). Dirò poi:

(18) $\quad K = k_1\, du$ con $k_1 = 3p_2 : a_1$, *angolo di contingenza*;

(19) $\quad I = K : A = 3p_2 : a_1^2$, *curvatura*;

(20) $\quad 1 : I$, *raggio di curvatura*

(*proiettivi*) di Γ in P.

I parametri differenziali (n. 2) primi e secondi delle coordinate normali x, y, z di P

(21) $\quad (x_1 : a_1, \; y_1 : a_1, \; z_1 : a_1) \quad , \quad (x_2 : a_1^2, \; y_2 : a_1^2, \; z_2 : a_1^2)$

sono le coordinate di due punti T, N *intrinseci e invarianti per coll.* [2]; quindi tali saranno le rette $t = PT$, $n = PN$, sempre distinte, essendo $|x\, x_1\, x_2| \neq 0$: la 1ª è la *tangente*, e la 2ª assumerò come *normale proiettiva* di Γ in P.

Un punto di t (di n) ha coordinate del tipo $x + hx_1/a_1, \ldots$ $(x + hx_2/a_1^2, \ldots)$, con h intrinseco ed invariante se tale è la definizione del punto: in tal caso dirò che h è la *distanza proiettiva* del punto da P; e dirò *centro di curvatura proiettiva* quel punto C di n per cui $h = 1 : I$.

Matematica. — *Sopra alcune formule di risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrisp. GINO LORIA.

1. Consideriamo l'equazione integrale di prima specie

$$\int_0^\xi \varphi(u)\, K(\xi - u)\, du = \Phi(\xi), \tag{1}$$

dove, naturalmente, $\Phi(0) = 0$, e supponiamo che $K(\xi)$ e $\Phi(\xi)$ siano definite per tutti i valori di ξ, in forma tale, che gl'integrali

$$\int_0^\infty e^{-\xi}\, K(v\xi)\, d\xi \quad , \quad \int_0^\infty e^{-\xi}\, \varphi(v\xi)\, d\xi ,$$

esistano, e siano finiti quando v varia in un intorno, conveniente, dell'origine.

[1] A prescindere da un coefficiente numerico (senza importanza) per l'ultima proposizione di (8).

[2] Perchè cogredienti a x, y, z. E così in generale $(x_n : a_1^n, \; y_n : a_1^n, \; z_n : a_1^n)$.