ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

x, y, z di P, *ma col fattore h fissato* [1] *in modo intrinseco ed invariante per coll.*: le dirò *coordinate normali* di P.

5. La funzione $\sigma(u)$ il cui differenziale è (17) è l'*arco proiettivo* di Γ, nel senso che $\sigma(u) - \sigma(u_0)$ è la *lunghezza proiettiva* dell'arco di Γ limitato dai punti $P_0(u_0)$ e $P(u)$ (Wilczynski). Dirò poi:

$$\text{(18)} \qquad K = k_1\, du \quad \text{con} \quad k_1 = 3p_2 : a_1 , \qquad \textit{angolo di contingenza};$$

$$\text{(19)} \qquad I = K : A = 3p_2 : a_1^2 , \qquad \textit{curvatura};$$

$$\text{(20)} \qquad 1 : I , \qquad \textit{raggio di curvatura}$$

(*proiettivi*) di Γ in P.

I parametri differenziali (n. 2) primi e secondi delle coordinate normali x, y, z di P

$$\text{(21)} \qquad (x_1 : a_1 \,,\; y_1 : a_1 \,,\; z_1 : a_1) \quad , \quad (x_2 : a_1^2 \,,\; y_2 : a_1^2 \,,\; z_2 : a_1^2)$$

sono le coordinate di due punti T, N *intrinseci e invarianti per coll.* [2]; quindi tali saranno le rette $t = \mathrm{PT}$, $n = \mathrm{PN}$, sempre distinte, essendo $|x\, x_1\, x_2| \neq 0$: la 1ª è la *tangente*, e la 2ª assumerò come *normale proiettiva* di Γ in P.

Un punto di t (di n) ha coordinate del tipo $x + hx_1/a_1, \dots$ $(x + hx_2/a_1^2, \dots)$, con h intrinseco ed invariante se tale è la definizione del punto: in tal caso dirò che h è la *distanza proiettiva* del punto da P; e dirò *centro di curvatura proiettiva* quel punto C di n per cui $h = 1 : I$.

Matematica. — *Sopra alcune formule di risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota di Francesco Sbrana, presentata dal Corrisp. Gino Loria.

1. Consideriamo l'equazione integrale di prima specie

$$\text{(1)} \qquad \int_0^{\xi} \varphi(u)\, K(\xi - u)\, du = \Phi(\xi) ,$$

dove, naturalmente, $\Phi(0) = 0$, e supponiamo che $K(\xi)$ e $\Phi(\xi)$ siano definite per tutti i valori di ξ, in forma tale, che gl'integrali

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi}\, K(v\xi)\, d\xi \quad , \quad \int_0^{\infty} e^{-\xi}\, \varphi(v\xi)\, d\xi ,$$

esistano, e siano finiti quando v varia in un intorno, conveniente, dell'origine.

[1] A prescindere da un coefficiente numerico (senza importanza) per l'ultima proposizione di (8).

[2] Perchè cogredienti a x, y, z. E così in generale $(x_n : a_1^n \,,\; y_n : a_1^n \,,\; z_n : a_1^n)$.

Posto, quindi, nella (1), $\xi = vr$, $u = vt$, moltiplichiamo per $e^{-r}\,dr$, e integriamo, tra i limiti zero e ∞; risulta

$$v\int_0^\infty e^{-r}\,dr \int_0^r \varphi(vt)\,\mathrm{K}[v(r-t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-r}\,\Phi(vr)\,dr\,.$$

Eseguiamo ora, nel primo membro, uno scambio di integrazioni, facendo uso della nota formula di Dirichlet, e poniamo poi $x = t$, $y = r - t$; otteniamo subito

$$v\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi(vx)\,dx \int_0^\infty e^{-y}\,\mathrm{K}(vy)\,dy = \int_0^\infty e^{-r}\,\Phi(vr)\,dr\,.$$

L'equazione (1) è così trasformata nell'altra

(2) $$v\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi(vx)\,dx = \mathrm{F}(v)\,,$$

essendo

$$\mathrm{F}(v) = \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{K}(vx)\,dx}\int_0^\infty e^{-x}\,\Phi(vx)\,dx\,.$$

Se poi $\mathrm{K}(v)$ e $\Phi(v)$ sono funzioni analitiche, lo è pure, in un conveniente intorno dell'origine, dove si annulla del primo ordine [1], $\mathrm{F}(v)$. Dalla (2) segue allora, com'è noto [2],

(3) $$\varphi(v) = \frac{1}{2\pi i v}\int_c e^z\,\mathrm{F}\left(\frac{v}{z}\right)dz\,,$$

dove c è, nel piano della variabile complessa z, un contorno chiuso, semplice, descritto nel senso positivo attorno all'origine, entro il quale la $\mathrm{F}(v)$ è regolare. Si verifica, del resto facilmente, che la funzione $\varphi(v)$, definita dalla (3), è soluzione della (2); basta per ciò aver presenti le note formule

(4) $$\Pi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^\lambda\,dx\,, \quad \frac{1}{\Pi(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^z\,z^{-\lambda-1}\,dz\,,$$

nella seconda delle quali, per λ intero (non negativo), si può scegliere per c il contorno stesso che compare nella (3) [3]. Posto, infatti,

$$\mathrm{F}(v) = v\sum_0^\infty{}_n\, a_n\, v^n\,,$$

(1) Ciò è chiaro, se $\mathrm{K}(0) \neq 0$; ma risulta anche quando sia, più in generale, $\mathrm{K}(0) = \mathrm{K}'(0) = \cdots = \mathrm{K}^{(n-1)}(0) = 0$, e $\mathrm{K}^{(n)}(0) \neq 0$; basti osservare che, affinchè la (1) sia risolubile, dovrà essere pure $\Phi(0) = \Phi'(0) = \cdots = \Phi^{(n)}(0) = 0$, come si vede, derivando n volte la (1).

(2) Sotto altra forma, la (3) si trova, p. es., nelle *Leçons sur les fonctions monogènes* del Borel; 1917, pagg. 46 e 47.

(3) Cfr., p. es., Whittaker and Watson, *A cours of modern Analysis*, 1915, pagine 237 e 239. D'altra parte, per λ intero (non negativo), la seconda delle (4) si ottiene subito, sviluppando in serie e^z, e integrando termine a termine.

dalla (3) abbiamo

$$v\int_0^{\infty} e^{-x}\varphi(vx)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^{\infty}{}_n\, a_n v^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-x}x^n\,dx\int_c e^z z^{-n-1}\,dz=\mathrm{F}(v)\,.$$

2. Mostreremo ora come l'equazione (2) si risolva, quando la funzione $f(v)=\frac{\mathrm{F}(v)}{v}$ sia sviluppabile in serie di Fourier, in un intervallo $(-l\,,l)$. Poniamo

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{P}(v)&=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{I}_0(2\sqrt{iv})+\mathrm{J}_0(2\sqrt{iv})\right\},\\ \mathrm{Q}(v)&=\frac{1}{2i}\left\{\mathrm{I}_0(2\sqrt{iv})-\mathrm{J}_0(2\sqrt{iv})\right\},\end{aligned}\right.\qquad (i=\sqrt{-1}),$$

dove $\mathrm{J}_0(z)$ è la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, mentre $\mathrm{I}_0(z)=\mathrm{J}_0(iz)$. Risulterà

$$\mathrm{P}(v)=\sum_0^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{v^{2n}}{(2n)\,!\,(2n)\,!}\;,\quad \mathrm{Q}(v)=\sum_0^{\infty}{}_n(-1)^n\frac{v^{2n+1}}{(2n+1)\,!\,(2n+1)\,!}\;;$$

e la soluzione della (2) è data dalla formula

$$(6)\qquad \varphi(v)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_1^{\infty}{}_n\int_{-l}^{l}f(u)\,\times$$
$$\times\left\{\cos n\frac{\pi}{l}u\;\mathrm{P}\!\left(n\frac{\pi}{l}v\right)+\mathrm{sen}\,n\frac{\pi}{l}u\;\mathrm{Q}\!\left(n\frac{\pi}{l}v\right)\right\}du\,.$$

Infatti, cambiando in essa v in vx, e sostituendo, nel primo membro della (2), otteniamo appunto

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_1^{\infty}{}_n\int_{-l}^{l}f(u)\cos n\frac{\pi}{l}(v-u)\,du=f(v)\,.$$

Ciò discende subito dalle seguenti uguaglianze:

$$(7)\qquad \int_0^{\infty}e^{-x}\,\mathrm{P}(vx)\,dx=\cos v\quad,\quad\int_0^{\infty}e^{-x}\,\mathrm{Q}(vx)\,dx=\mathrm{sen}\,v\,,$$

che si stabiliscono facilmente, ricorrendo agli sviluppi in serie delle funzioni $\mathrm{P}(v)$ e $\mathrm{Q}(v)$, e alla prima delle (4).

3. Supponiamo invece che $f(v)$ sia definita per ogni valore reale di v, e rappresentabile mediante l'integrale doppio di Fourier [2]. Abbiamo allora

$$(8)\qquad \varphi(v)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\left\{\cos\alpha\lambda\;\mathrm{P}(\alpha v)+\mathrm{sen}\,\alpha\lambda\;\mathrm{Q}(\alpha v)\right\}d\lambda\,,$$

come agevolmente si verifica, procedendo in modo analogo al precedente.

[1] Cfr. Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik*, 1er Bd., ediz. 1919, § 18.