ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuova condizione necessaria per un estremo di un integrale doppio.* Nota I di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi.

Nella mia Nota *Nuova dimostrazione della necessità della condizione di Jacobi*, ultimamente apparsa in questi Rendiconti, della necessità di detta condizione per un minimo dell'integrale semplice

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx\,, \quad y(x_1) = y_1\,, \quad y(x_2) = y_2\,,$$

è data una dimostrazione che consente, conservando le solite notazioni impiegate in quella Nota, di enunciare la indicata condizione sotto questa nuova forma:

Teorema A. — *Supposto* $R(x) > 0$ *in* (x_1, x_2), *detta* $G(x, \xi)$ *la funzione di Green relativa all'espressione differenziale* $\frac{d}{dx}\left(R\frac{du}{dx}\right)$ *e alle condizioni ai limiti* $u(x_1) = u(x_2) = 0$ (1), *indicando con* $\Delta(\lambda)$ *la funzione intiera in* λ *esprimente il determinante dell'equazione integrale di Fredholm*

$$u(x) = \lambda \int_{x_1}^{x_2} G(x, \xi)\, A(\xi)\, u(\xi)\, d\xi\,,$$

condizione necessaria affinchè l'estremale $y = y_0(x)$ *— alla quale si riferiscono le funzioni* $R(x)$ *e* $A(x)$ *— fornisca un minimo per l'integrale* $J(y)$ *è che l'indicata funzione intiera* (2) *non abbia alcuno zero interno all'intervallo* $(0, 1)$.

Si ha pure che:

Teorema B. — *Se la funzione intiera* $\Delta(\lambda)$ *risulta diversa da zero in tutto l'intervallo* $(0, 1)$, *estremi inclusi, l'estremale* $y = y_0(x)$ *fornisce certamente un minimo debole per l'integrale* $J(y)$.

Scopo della Nota presente, e di una successiva, è di mostrare che un teorema, *perfettamente* analogo al *Teorema A*, esprime una condizione ne-

(1) Cfr. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Teubner, 1912], pp. 39-58; Picone, *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine* (Tesi d'abilitazione) [Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, vol. XI], pp. 73-88. Quivi, posto $t(x, \xi) = \int_x^\xi [1 : R(\eta)]\, d\eta$, si trova $G(x, \xi) = t(x, x_1)\, t(x_2, \xi) : t(x_2, x_1)$ per $x \leq \xi$; $G(x, \xi) = t(x_1, \xi)\, t(x, x_2) : t(x_2, x_1)$ per $x \geq \xi$.

(2) La quale, com'è noto, è priva di zeri complessi, ed ha il valore *uno* per $\lambda = 0$.

cessaria cui deve soddisfare una superficie estremale $z = z_0(x, y)$ per l'integrale doppio

$$J(z) = \iint_D f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

affinchè con essa si possa effettivamente realizzare un minimo per l'integrale.

1. Supponiamo *regolare* il dominio D al quale viene esteso l'integrale $J(z)$. Il contorno C di D sia costituito dalla curva esterna, regolare, semplice e chiusa C_0 e dalle curve interne, regolari, semplici e chiuse $C_1, C_2 \ldots C_\nu$. Detto s l'arco della curva $C_i (i = 0, 1, \ldots, \nu)$, siano $x = x_i(s)$, $y = y_i(s)$ $(0 \leq s \leq l_i)$, le equazioni parametriche della curva. Sia $\varDelta$ il dominio dello spazio definito dalle condizioni (x, y) in D, $|z| \leq a$. Supponiamo che la funzione $f(x\, y\, z\, p\, q)$ sia definita nell'insieme T formato dalle quintuple di valori x, y, z, p, q, per ciascuna delle quali x, y, z esprimono le coordinate di un punto di $\varDelta$, e p e q sono due numeri reali qualsivogliano; e supponiamo che la f si conservi continua in T, con tutte le sue derivate parziali dei primi *quattro* ordini.

Siano ora assegnate le $\nu + 1$ funzioni, di s, $z = z_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$. Ciascuna funzione $z_i(s)$ sia definita nell'intervallo $(0, l_i)$, e sia ivi finita e continua con la sua derivata prima, sia periodica e di periodo l_i e soddisfi inoltre alla limitazione $|z_i(s)| < a$. La curva $\boldsymbol{\Gamma}_i$ dello spazio, di equazioni parametriche $x = x_i(s)$, $y = y_i(s)$, $z = z_i(s)$, sarà regolare, semplice e chiusa, avrà per biunivoca proiezione sul piano (x, y) la curva C_i e starà completamente nell'interno dello strato $\boldsymbol{\Sigma}$ limitato dai due piani orizzontali $z = -a$ e $z = +a$.

Noi porremo nel modo seguente il problema di calcolo delle variazioni per l'integrale $J(z)$:

Nell'insieme S *delle funzioni, delle due variabili x e y, definite in* D, *ivi finite e continue con le loro derivate prime e verificanti le condizioni*

$$(1) \qquad z[x_i(s), y_i(s)] = z_i(s), \quad |z(x, y)| < a,$$

determinarne una tale che per essa l'integrale $J(z)$ *riesca un minimo*. In altre parole: *costruire una porzione di superficie regolare aperta, di base* D, *completamente interna allo strato* $\boldsymbol{\Sigma}$, *avente l'assegnato bordo* $\boldsymbol{\Gamma}$ *costituito dalle* $\nu + 1$ *curve chiuse* $\boldsymbol{\Gamma}_0, \boldsymbol{\Gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_\nu$, *per la quale l'integrale* $J(z)$ *realizzi un minimo nell'insieme* S.

2. Nelle ordinarie trattazioni di questo problema [1] si consente alle derivate prime delle funzioni $z(x, y)$ — lasciando intatte tutte le altre condizioni — di presentare in D, pur rimanendo limitate, delle discontinuità. Precisamente si suppone che, per ogni funzione $z = z(x, y)$, verificante sempre le condizioni (1), si possa decomporre il dominio D in un numero finito di dominii regolari, in ciascuno dei quali la funzione riesca finita e continua con le sue derivate prime, risultando inoltre la funzione continua

[1] Cfr. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung* [Teubner, 1909], pag. 653.

in tutto D. L'integrale J(z) non perde, perciò, il suo significato riemanniano, ma già fin da ora si viene però a rompere l'analogia con la trattazione che si suol fare dei problemi ad una dimensione di calcolo delle variazioni.

Tale fatto è, parmi, in primo luogo, causato dal modo come finora si è dedotta la terza condizione necessaria — analoga a quella di Jacobi per i problemi ad una dimensione — affinchè un'estremale per l'integrale J(z) fornisca effettivamente un estremo. A tale condizione è pervenuto il Sommerfeld [1], estendendo il procedimento, dato da Schwarz, per dimostrare la necessità della condizione di Jacobi ad una dimensione. Estendendo, invece, il procedimento da me seguìto nella Nota sopracitata, si giunge al seguente teorema, *perfettamente* analogo a quello qui enunciato in principio:

TEOREMA A — *Supponiamo che l'estremale* $z=z_0(x,y)$ *per l'integrale* J(z), *appartenendo all'insieme* S, *risulti in* D *finita e continua con le sue derivate parziali dei primi* due *ordini, e che, posto*

$$f_{zz}\left(x\,,y\,,z_0\,,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=\mathrm{P}(x\,,y)\,,\quad f_{zp}\left(x\,,y\,,z_0\,,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=\mathrm{Q}_1(x\,,y)\,,$$

$$f_{zq}\left(x\,,y\,,z_0\,,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=\mathrm{Q}_2(x\,,y)\,,\quad \frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Q}_2}{\partial y}-\mathrm{P}(x\,,y)=\mathrm{A}(x\,,y)\,,$$

$$f_{pp}\left(x\,,y\,,z_0\,,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=\mathrm{R}_{11}(x,y)\,,\quad f_{pq}\left(x\,,y\,,z_0\,,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=\mathrm{R}_{12}(x\,,y)\,,$$

$$f_{qq}\left(x\,,y\,,z_0\,,\frac{\partial z_0}{\partial x},\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)=\mathrm{R}_{22}(x\,,y)\,,$$

risulti, in D,

$$\mathrm{R}_{11}(x\,,y)>0\,,\quad \mathrm{R}_{11}(x\,,y)\,\mathrm{R}_{22}(x\,,y)-\mathrm{R}_{12}^2(x\,,y)>0\,,$$

e la funzione A(x, y) *finita e continua con le sue derivate prime. Allora, detta* G(xy, $\xi\eta$) *la funzione di Green relativa all'espressione alle derivate parziali*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{R}_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{R}_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{R}_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{R}_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

e alla condizione al contorno

$$u(x\,,y)\quad su\ \mathrm{C}=0\,,$$

indicando con $\varDelta(\lambda)$ *la funzione intiera in* λ *esprimente il determinante della equazione integrale di Fredholm*

$$u(xy)=\lambda\int\!\!\int_{\mathrm{D}}\mathrm{G}(xy\,,\xi\eta)\,\mathrm{A}(\xi\eta)\,u(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

condizione necessaria affinchè l'estremale $z=z_0(x\,,y)$ *fornisca, nell'insieme* S, *un minimo per l'integrale* J(z) *è che l'indicata funzione intiera* [2] *non abbia alcuno zero nell'interno dell'intervallo* (0, 1).

Nella Nota a questa successiva esporrò la semplicissima dimostrazione di questo teorema.

(1) *Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung* [Bd. VII, 1899], p. 188. Cfr. Bolza, op. cit., p. 676.

(2) La quale è priva di zeri complessi ed ha il valore *uno* per $\lambda=0$.