ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

molecola d'acqua del composto formatosi in una prima fase. Ma se ancora non si conosce tale complesso allo stato libero, è interessante notare il fatto che il potassio, bruciando all'aria, fornisce l'ossido K_2O_4, al quale W. Traube, in base ad una serie di esperienze eseguite con la valentia che distingue questo chimico, ha assegnato la struttura

$$(KO \cdot OK)\ (O = O)$$

che corrisponde al sale di potassio di tale complesso. La sua forma è analoga a quella dei chinidroni: questi ultimi, come è noto, si possono scindere facilmente nei loro componenti

$$(HO \cdot C_6H_4 \cdot OH)\ (O = C_6H_4 = O) = HO \cdot C_6H_4 \cdot OH + O = C_6H_4 = O\,,$$

nello stesso modo che il sale studiato da Traube, per azione degli acidi, fornisce esattamente una molecola di acqua ossigenata ed una di ossigeno,

$$(HO \cdot OH)\ (O = O) = HO \cdot OH + O = O\,,$$

che perciò corrispondono rispettivamente all'idrochinone ed al chinone. La analogia si può, dunque, estendere anche nel caso di tali composti che a prima vista si presentano così disparati fra di loro.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota III del Corrispondente Luigi Berzolari.

10. Per la regola di cui già abbiamo fatto uso, le rette singolari di Θ si ottengono associando alla (11) un'altra equazione, cui può darsi la forma

$$p_{31}\,p_{24}\,[(p_{12}-p_{34})^4-(p_{31}^2-p_{24}^2)^2] \\ -(p_{12}-p_{34})^2\,[4\,p_{31}^2\,p_{24}^2-(p_{31}^2-p_{24}^2)^2]=0\,.$$

Dalle due equazioni si trae

$$p_{31}\,p_{24}\,(p_{12}-p_{34})^4=0\,,$$

perciò la congruenza delle rette singolari di Θ si scompone nelle tre rappresentate dalle coppie di equazioni

$$\begin{aligned} p_{31}&=0\quad, & p_{24}&=0\,;\\ p_{12}-p_{34}&=0\quad, & p_{31}+p_{24}&=0\,;\\ p_{12}-p_{34}&=0\quad, & p_{31}-p_{24}&=0\,, \end{aligned}$$

ognuna contata otto volte. Ma, per le (5), queste non sono che le congruenze lineari aventi per direttrici $d_1\,d_1'$, $d_2\,d_2'$, $d_3\,d_3'$, e dal n. precedente, come pure dalla stessa (11'), risulta che ogni loro retta è anzi *doppia* per il complesso. Dunque:

Il complesso Θ non ha altre rette singolari che doppie, e sono tutte quelle delle congruenze lineari aventi per direttrici $d_1\, d'_1$, $d_2\, d'_2$, $d_3\, d'_3$.

Le generatrici del regolo S sono anzi rette quadruple per il complesso.

11. Consideriamo il cono di Θ avente il vertice in un punto y di Q. Non si vien meno alla generalità supponendo y sulla generatrice $x_2 = x_3 = 0$ di S, e in tal caso il cono ha l'equazione

$$(y_4^2\, x_2^2 - y_1^2\, x_3^2)^2 + 4\, y_1\, y_4\, x_2\, x_3\, (y_1\, x_2 + y_4\, x_3)^2 = 0\,.$$

Dunque *il cono di Θ avente il vertice in un punto generico y di Q si spezza in quattro piani, che passano per la generatrice del regolo S uscente da y e formano un gruppo equianarmonico.*

Se y giace sopra una delle rette $e_1, \dots, e_4, e'_1, \dots, e'_4$, e soltanto in questo caso, uno dei quattro piani è quello che tocca Q in y.

Il cono di Θ col vertice in un punto y di una delle due rette d_i, d'_i $(i = 1, 2, 3)$ si riduce al piano che da y proietta l'altra retta, contato quattro volte. È questo il solo caso in cui i quattro piani non sono distinti.

12. Un altro notevole complesso del quarto grado, covariante della terna $K_1\, K_2\, K_3$, si ottiene nel modo seguente.

Rappresentiamo di nuovo una generatrice arbitraria di S' con le (4). Perchè essa sia appoggiata ad una retta r di coordinate p_{ik}, dovrà aversi

$$p_{24}\, \lambda^2 + (p_{12} - p_{34})\, \lambda + p_{31} = 0\,. \tag{12}$$

Dicendo λ_1 e λ_2 le radici di questa equazione, le due generatrici di S' appoggiate ad r determinano nell'involuzione J (n. 2) due gruppi, che, per le (5), sono dati dalle equazioni

$$\lambda_1^2\, \lambda^4 - (\lambda_1^4 + 1)\, \lambda^2 + \lambda_1^2 = 0\,, \qquad \lambda_2^2\, \lambda^4 - (\lambda_2^4 + 1)\, \lambda^2 + \lambda_2^2 = 0\,.$$

I due gruppi sono apolari quando

$$\lambda_1^4\, \lambda_2^4 + \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + 12\, \lambda_1^2\, \lambda_2^2 + 1 = 0\,,$$

ossia, per la (12), quando

$$(p_{12} - p_{34})^4 + (p_{31}^2 + p_{24}^2)^2 + 12\, p_{31}^2\, p_{24}^2 - 4\, p_{31}\, p_{24}\, (p_{12} - p_{34})^2 = 0\,,$$

alla quale, avendosi

$$p_{31}^2 + p_{24}^2 = \frac{1}{2}(K_2^2 - K_3^2)\,, \qquad p_{31}\, p_{24} = -\frac{1}{4}(K_2^2 + K_3^2)\,,$$

può anche darsi la forma

$$\Omega \equiv K_1^4 + K_2^4 + K_3^4 + K_2^2\, K_3^2 + K_3^2\, K_1^2 + K_1^2\, K_2^2 = 0\,. \tag{13}$$

Questa è dunque l'equazione del complesso Ω di quarto grado, luogo delle rette appoggiate a due generatrici del regolo S', che determinano nell'involuzione J due gruppi tra loro apolari.

Meritano di essere rilevate le seguenti identità, che permettono di rappresentare sotto varie forme, e in relazione con i complessi di primo e secondo grado considerati nei nn. 7 e 8, le equazioni di Θ e Ω:

$$(14)\qquad \Omega = K^2 - \Theta = 3\,\Theta - L_1 L_2 L_3 L_4 = K' K'' + 2\,\Theta$$

$$= \frac{1}{4}(3\,K^2 - L_1 L_2 L_3 L_4) = \frac{1}{4}(L_1^4 + L_2^4 + L_3^4 + L_4^4) - 5\,\Theta\,.$$

Ne segue, ad es., che *il cono di Ω avente per vertice un punto generico y ha tra i suoi piani bitangenti i piani focali di y rispetto ai complessi lineari $L_1, \dots, L_4$, essendo generatrici di contatto quelle stesse del cono di Θ avente il vertice y (quindi otto generatrici del cono circoscritto da y a Q)*.

Tagliando il detto cono col piano $y d_1$, risulta $K_1^4 + K_2^4 = 0$, dunque:

I piani che da un punto generico y proiettano le sei rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ secano il cono di Ω avente il vertice y secondo quattro rette formanti un gruppo armonico.

13. Volendo le rette singolari di Ω, cercheremo, più in generale, quelle di un complesso qualunque del fascio

$$(15)\qquad K_2^2 K_3^2 + K_3^2 K_1^2 + K_1^2 K_2^2 + c\,(K_1^4 + K_2^4 + K_3^4) = 0$$

determinato da Θ e Ω. A tal fine occorre associare alla (15) un'altra equazione, a cui, dopo alcune trasformazioni, può darsi la forma

$$(16)\qquad 4\,c^2 (K_1^6 + K_2^6 + K_3^6) + (4\,c + 1)(K_1^4 K_2^2 + \cdots) + 6\,K_1^2 K_2^2 K_3^2 = 0\,.$$

Ora si ha l'identità

$$K_1^6 + K_2^6 + K_3^6 + K_1^4 K_2^2 + \cdots = K(K_1^4 + K_2^4 + K_3^4)\,,$$

dalla quale segue

$$K\,[\Theta + c\,(K_1^4 + K_2^4 + K_3^4)] = K\Theta + c\,(K_1^6 + K_2^6 + K_3^6 + K_1^4 K_2^2 + \cdots)\,,$$

quindi per le rette del complesso (15) si ha pure l'identità

$$K\Theta + c\,(K_1^6 + K_2^6 + K_3^6 + K_1^4 K_2^2 + \cdots) = 0\,.$$

Ma è pure identicamente

$$K_1^4 K_2^2 + \cdots = K\Theta - 3\,K_1^2 K_2^2 K_3^2\,,$$

e, per mezzo di questa e della precedente, la (16) diviene

$$(2\,c - 1)\,[(2\,c + 1)\,K\Theta - 3\,(2\,c - 1)\,K_1^2 K_2^2 K_3^2] = 0\,.$$

Si può escludere che sia $2\,c - 1 = 0$, giacchè in tale ipotesi il complesso (15), riducendosi a K contato due volte, non ha interesse per la presente questione. D'altra parte è identicamente

$$(17)\qquad K\Theta = (K_2^2 + K_3^2)(K_3^2 + K_1^2)(K_1^2 + K_2^2) + K_1^2 K_2^2 K_3^2\,,$$

quindi come risultato definitivo si ha che *le rette singolari del complesso* (15) *sono quelle ch'esso ha in comune col complesso di* 6^o *grado*

$$(2c+1)(K_2^2+K_3^2)(K_3^2+K_1^2)(K_1^2+K_2^2)-4(c-1)K_1^2K_2^2K_3^2=0 .$$

Per $c=1$ si deduce:

Le rette singolari del complesso Ω *costituiscono 24 congruenze lineari, le quali hanno per direttrici una delle rette* $d_i\,d'_i$ $(i=1,2,3)$ *e risp. una delle quattro rette formanti quel gruppo armonico dell'involuzione* J *che è coordinato* (n. 2) *alla coppia* $d_i\,d'_i$.

14. Escluso che si tratti di Θ, le rette che, uscendo da un punto y, si appoggiano alle coppie di rette $d_i\,d'_i$, appartengono al cono del complesso (15) avente il vertice y soltanto quando y giaccia su Q.

Se y è su Q, e, com'è lecito, si suppone $y_2=y_3=0$, il cono anzidetto si spezza nei quattro piani aventi l'equazione complessiva

$$\begin{aligned}[c\,y_1^4+(2c-1)\,y_4^4]\,x_2^4+4(c-1)\,y_1^3y_4\,x_2^3x_3 \\ +6(3c-1)\,y_1^2y_4^2\,x_2^2x_3^2+4(c-1)\,y_1y_4^3\,x_2x_3^3 \\ +[(2c-1)\,y_1^4+c\,y_4^4]\,x_3^4=0 .\end{aligned}$$

I due invarianti del primo membro sono

$$i=2c(2c-1)(y_1^8+14\,y_1^4y_4^4+y_4^8) ,$$
$$j=6(c+1)(2c-1)^2\,y_1^2y_4^2(y_1^4-y_4^4)^2 ,$$

e il discriminante è

$$\begin{aligned}(2c-1)^3\,[c^3(y_1^8+14\,y_1^4y_4^4+y_4^8)^3 \\ -27(c+1)^2(2c-1)\,y_1^4y_4^4(y_1^4-y_4^4)^4] ,\end{aligned}$$

che per il complesso Ω si riduce al quadrato dell'espressione

$$(y_1^4+y_4^4)(y_1^4+6\,y_1^2y_4^2+y_4^4)(y_1^4-6\,y_1^2y_4^2+y_4^4) .$$

Ne risultano le proprietà:

Per un complesso arbitrario del fascio (15) *il cono avente per vertice un punto* y *di* Q *si scompone in quattro piani passanti per la generatrice di* S *uscente da* y (*i quali costituiscono un gruppo dell'involuzione* J *solo quando si tratti del complesso* Ω).

I quattro piani formano un gruppo armonico quando y *giace sopra una delle rette* $d_i\,d'_i$ (*a meno che non sia* $c=-1$, *nel qual caso il complesso si scinde nei due complessi quadratici* K' *e* K'', *e i quattro piani sono armonici qualunque sia il punto* y *di* Q: cfr. la fine del n. 8), *e formano un gruppo equianarmonico quando* y *sta sopra una delle rette* $e_i\,e'_i$ (*a meno che non sia* $c=0$, *ossia il complesso non coincida con* Θ, *nel qual caso, come si vide al n. 11, i quattro piani sono equianarmonici dovunque sia y su* Q).

Per il complesso Ω i quattro piani non sono distinti soltanto se y si sceglie su una delle dodici rette $a_i\, a_i'\, a_i''$ (n. 2): in tal caso gli stessi piani coincidono a due a due con quelli che da y proiettano le rette della coppia coordinata $d_i\, d_i'$.

Se poi, ancora per Ω, il punto y si prende sopra una delle $d_i\, d_i'$, i quattro piani proiettano da y le quattro rette costituenti il gruppo armonico dell'involuzione J *coordinato alla coppia fissata $d_i\, d_i'$* (1).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica celeste. — *Sui satelliti retrogradi.* Nota II di P. Burgatti, presentata dal Corrisp. G. Armellini.

Per la determinazione delle orbite circolari, basta esprimere che v'ha equilibrio fra le tre forze agenti su T in tale moto: la forza attrattiva di P, la forza centrifuga e la forza di Coriolis considerata nella Nota precedente; la quale, si tenga presente, è diretta verso P nel moto retrogrado, in senso opposto nel moto diretto. Per conseguenza, posto $8\,k\,m\,\omega = v_0^3$, si ha: pel moto retrogrado

$$(1) \qquad 2\omega v\varrho^2 - v^2\varrho + km = 0\,, \quad \text{da cui} \quad \varrho = \frac{v^2 \pm \sqrt{v(v^3 - v_0^3)}}{4\omega v}\,,$$

pel moto diretto

$$(2) \qquad 2\omega v\varrho^2 + v^2\varrho - km = 0\,, \quad \text{da cui} \quad \varrho = \frac{-v^2 + \sqrt{v(v^3 + v_0^3)}}{4\omega v}\,.$$

Le orbite retrograde esistono solo per $v > v_0$, ed in corrispondenza ad una data velocità $v > v_0$ se ne hanno due: una interna alla circonferenza di raggio $\varrho_0 = v_0 : 4\omega$, l'altra esterna. Questa circonferenza, corrispondente al minimo valore $v = v_0$ della velocità, sarà chiamata *l'orbita singolare*, o indicata semplicemente con (Σ).

Le orbite dirette, invece, possono essere percorse con qualunque velocità, e ad ogni velocità ne corrisponde una sola.

Quelle corrispondenti a $v > v_0$ stanno nell'interno della circonferenza di raggio $\varrho' = 0{,}42 \cdot v : 4\pi$; le altre, percorse, con velocità minore di v_0, al

(1) Quest'ultima proprietà può anche dedursi trasformando per dualità quella con cui si chiude il n. 12.