ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Sulle omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in* S_3. Nota di EDWARD CECH, presentata dal Corrisp. G. FUBINI.

1. L'equazione di una superficie F nell'intorno d'un suo punto O, dove le due tangenti asintotiche α_1, α_2 (1) sono distinte e nessuna di esse ha con F un contatto di ordine superiore al secondo (2) si può scrivere

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{x_1}{x_4}\frac{x_2}{x_4} + \frac{1}{6}\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_4^3} + \cdots \tag{1}$$

Le rette

$$x_3 = x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_3 = x_1 + \varepsilon x_2 = 0 \ , \ x_3 = x_1 + \varepsilon^2 x_2 = 0 \ , \ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

che indicherò con t_1, t_2, t_3, sono le *tangenti di Darboux*. Le tangenti coniugate τ_1, τ_2, τ_3, sono le tangenti di Segre. Con ω indico il piano tangente $x_3 = 0$. Ogni quadrica del fascio

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 + \lambda x_3^2 = 0$$

ha in 0 con F un contatto del terzo ordine, e $t_1 t_2 t_3$ sono le tangenti in 0 all'intersezione della quadrica con F; la quadrica Λ di Lie appartiene al fascio.

2. Ecco le equazioni delle *omografie* che conservano l'elemento del terzo ordine di F:

$$\text{(A)} \quad (x_1 + a_{42} x_3)\xi'_1 + (x_2 + a_{41} x_3)\xi'_2 + \\ + x_3 \xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi'_4 ;$$

$$\text{(B)} \quad \varepsilon(x_1 + a_{42} x_3)\xi'_1 + \varepsilon^2(x_2 + a_{41} x_3)\xi'_2 + \\ + x_3 \xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi'_4 ;$$

$$\text{(B}'\text{)} \quad \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\xi'_1 + \varepsilon(x_2 + a_{41} x_3)\xi'_2 + \\ + x_3 \xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi'_4 ;$$

$$\text{(C)} \quad (x_2 + a_{41} x_3)\xi'_1 + (x_1 + a_{42} x_3)\xi'_2 + x_3 \xi'_3 + \\ + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\xi'_4 ;$$

(1) Precisamente indico con α_1 (α_2) la tangente $x_3 = x_1 = 0$ ($x_3 = x_2 = 0$).
(2) Sicchè le rigate sono escluse.

$$(C') \quad \varepsilon(x_2 + a_{41} x_3)\,\xi'_1 + \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\,\xi'_2 + \\ + x_3\,\xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\,\xi'_4 ;$$

$$(C'') \quad \varepsilon^2(x_2 + a_{41} x_3)\,\xi'_1 + \varepsilon^2(x_1 + a_{42} x_3)\,\xi'_2 + \\ + x_3\,\xi'_3 + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + x_4)\,\xi'_4 .$$

Si hanno, dunque, sei sistemi lineari ∞^3 di tali omografie, il primo dei quali è un gruppo continuo. Questi sistemi possiamo distinguere secondo il modo come permutano le t_1, t_2, t_3.

Possiamo fare una suddivisione secondo i divisori elementari delle omografie:

(Aa) $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$; $(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)$.

(Ab) $a_{41} = a_{42} = 0 , a_{43} \neq 0$; $(1-\varrho)^2(1-\varrho)(1-\varrho)$.

(Ac) $a_{41} \neq 0 , a_{42} = 0$;
(Ac') $a_{41} = 0 , a_{42} \neq 0$; $\Big\}$ $(1-\varrho)^2(1-\varrho)^2$.

(Ad) $a_{41}\,a_{42} \neq 0$; $(1-\varrho)^3(1-\varrho)$.

(Ba) $a_{43} = a_{41}\,a_{42}$; $(1-\varrho)(1-\varrho)(\varepsilon-\varrho)\,\varepsilon^2-\varrho)$.

(Bb) $a_{43} \neq a_{41}\,a_{42}$; $(1-\varrho)^2(\varepsilon-\varrho)(\varepsilon^2-\varrho)$.

(Ca) $a_{41} + a_{42} = 0 , a_{41}^2 + a_{43} = 0$; $(1-\varrho)(1-\varrho)(1-\varrho)(1+\varrho)$.

(Cb) $a_{41} + a_{42} = 0 , a_{41}^2 + a_{43} \neq 0$; $(1-\varrho)^2(1-\varrho)(1+\varrho)$.

(Cc) $a_{41} + a_{42} \neq 0$; $(1-\varrho)^3(1+\varrho)$.

È inutile occuparsi dei sistemi (B′) e (C′), (C″) che si riducono a (B) e (C) scambiando le denominazioni delle t_1, t_2, t_3.

3. Per ciascuno dei tipi enumerati, indico il simbolo di Predella e le proprietà geometriche *caratteristiche*:

(Aa). [3]. Identità.

(Ab). [(20)]. Omologia speciale, col centro 0 e piano ω d'omologia.

(Ac). [(11)]. Le rette unite dell'omografia formano una congruenza lineare speciale di cui α_1 è la retta direttrice. Esiste una quadrica che tocca tutte le rette della congruenza ed ha con F in 0 un contatto del secondo ordine.

(Ac') nasce da (Ac) sostituendo α_1 con α_2.

(Ad). [(100)]. La retta p dei punti uniti e la retta p' dei piani uniti sono tangenti coniugate di F. L'omografia subordinata in un piano unito qualunque, possiede delle coniche unite che hanno un contatto del secondo ordine con F.

È notevole che, per caratterizzare il gruppo (A), occorre conoscere soltanto l'elemento del *secondo* ordine di F.

(Ba). [100]. C'è un punto unito P_1 sopra α_1, un punto unito P_2 sopra α_2, e inoltre una retta di punti uniti la polare di $P_1 P_2$ rapporto $\mathcal{A}$. La omografia è ciclica d'ordine tre.

(Bb). [(00) 00]. 0 è un punto unito doppio, inoltre c'è un punto unito P_1 (e un altro P_2) sopra α_1 (sopra α_2). La retta polare di $P_1 P_2$ rapporto $\mathcal{A}$ è pure unita. L'omografia subordinata nella stella 0 è ciclica d'ordine tre.

(Ca). [20]. Omologia involutoria; il centro d'omologia giace sopra t_1 e il piano d'omologia ne è il piano polare rapporto $\mathcal{A}$. Ciò si potrebbe anche prendere come definizione delle tangenti di Darboux.

(Cb). [(10) 0]. Tutti i punti di τ_1 e tutti i piani per t_1, inoltre un punto di t_1 e il suo piano polare rapporto $\mathcal{A}$ sono uniti. La proiettività subordinata nel fascio delle tangenti di F è involutoria.

(Cc). [(000) 0]. Il punto unito triplo P sta su τ_1, il punto unito semplice Q sta su t_1. La retta τ_1 e il piano polare di Q rapporto $\mathcal{A}$ sono uniti: La proiettività subordinata nel fascio delle tangenti di F è involutoria.

4. Ecco le equazioni delle *correlazioni* che conservano l'elemento del terzo ordine di F:

$$(A)\quad (x_2 + a_{31}\,x_3)\,x'_1 + (x_1 + a_{32}\,x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x'_3 + x_3\,x'_4 = 0\,,$$

$$(B)\quad \varepsilon(x_2 + a_{31}\,x_3)\,x'_1 + \varepsilon^2(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x'_3 + x_3\,x'_4 = 0\,,$$

$$(B')\quad \varepsilon^2(x_3 + a_{31}\,x_3)\,x'_1 + \varepsilon(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x'_3 + x_3\,x'_4 = 0\,,$$

$$(C)\quad (x_1 + a_{32}\,x_3)\,x'_1 + (x_2 + a_{31}\,x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x'_3 + x_3\,x'_4 = 0\,,$$

$$(C')\quad \varepsilon^2(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x'_1 + \varepsilon(x_2 + a_{31}\,x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x'_3 + x_3\,x'_4 = 0\,,$$

$$(C'')\quad \varepsilon(x_1 + a_{32}\,x_3)\,x'_1 + \varepsilon^2(x_2 + a_{31}\,x_3)\,x'_2 + \\ + (a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + x_4)\,x'_3 + x_3\,x'_4 = 0\,.$$

Come sopra, non occorre occuparsi dei sistemi (B′), (C′), (C″).

5. Indichiamo ora le proprietà geometriche caratteristiche delle correlazioni dei tipi (A), (B), (C):

(A). Polarità rispetto ad una quadrica che ha in 0 un contatto del secondo ordine colla simmetrica di F rispetto ad ω.

(B). Divisori elementari $(1-\varrho)$ $(1-\varrho)$ $(\varepsilon-\varrho)$ $(\varepsilon^2-\varrho)$. C'è un punto fondamentale Q_1 sopra α_1 e un altro O_2 sopra α_2; inoltre sono fondamentali tutti i punti di una retta 0 P, passante per 0. Le rette $Q_1 Q_2$ e 0 P sono polari rapporto $\mathcal{A}$. La quadrica φ_1 dei punti d'incidenza e la quadrica φ_2 dei piani d'incidenza s'intersecano nelle rette $0Q_1$; $0Q_2$, PQ_1, PQ_2. Siano k, k_1, k_2 le curvature, nel punto 0, dell'intersezione di F, φ_1 e φ_2 mediante un piano scelto nella stella 0; si ha $2k = 4k_1 = k_2$.

(Ca) $a_{31} = a_{32}$. Polarità rispetto ad una quadrica per la quale valgono le seguenti proprietà:

1) t_1, τ_1 e α_1, α_2 ne sono due coppie di tangenti coniugate:

2) ogni punto di t_1 ha, rispetto ad essa e rispetto a Λ, il medesimo piano polare.

(Cb) $a_{31} \neq a_{32}$. Divisori elementari $(1-\varrho)^3\,(1-\varrho)$. I punti fondamentali sono i punti di τ_1; i piani fondamentali sono i piani per t_1. Le due quadriche d'incidenza φ_1, φ_2, si toccano lungo quella coppia di tangenti coniugate di F che divide armonicamente t_1 e τ_1. Un punto qualsiasi di t_1 ha lo stesso piano polare rispetto alle tre quadriche φ_1, φ_2 e Λ.

7. Con la stessa facilità, si potrebbero caratterizzare le omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie *rigata*. Del resto, per una rigata esiste anche un ampio gruppo di omografie e correlazioni che conserva quattro rette successive, anche queste omografie e correlazioni si caratterizzano facilmente, facendo uso delle *tangenti flecnodali*.

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita di diagrammi costituiti da una successione di archi di linee diverse.* Nota dell'ing. LETTERIO LABOCCETTA, presentata dal Corrispondente A. CROCCO.

Si presenta frequentemente nella fisica, ed anche in molte questioni tecniche, il caso di dover rappresentare una grandezza la quale, in diversi intervalli del campo della variabile, è espressa da funzioni diverse della variabile stessa. Avviene cioè che, portando i valori della variabile come ascisse sull'asse delle x, si hanno, su questo, n successivi intervalli, fisicamente distinti,

$$(1) \qquad -\infty\ x_1\,,\ x_1\,x_2\,,\ \ldots\ x_{i-1}\,x_i\ \ldots\ x_{n-1}\ +\infty\,,$$

in ciascuno dei quali il diagramma rappresentativo è costituito da un arco di curva appartenente ad una delle linee

$$(2) \qquad y_1 = F_1(x)\ldots \quad y_i = F_i(x)\ldots \quad y_n = F_n(x)\,.$$

Si voglia costruire l'equazione di questo diagramma, con esclusione però degli archi delle dette linee che non fanno parte di esso.

A tale scopo si formino, nel modo come si dirà in appresso, delle funzioni « limitatrici » $\varphi_i\binom{1}{0}$ le quali godano la proprietà di avere costantemente il valore $+1$ nell'intervallo i^{mo}, cioè per tutti i valori della variabile compresi fra x_{i-1} e x_i, e costantemente il valore zero per ogni altro valore