ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

(Ca) $a_{31} = a_{32}$. Polarità rispetto ad una quadrica per la quale valgono le seguenti proprietà:

1) t_1, τ_1 e α_1, α_2 ne sono due coppie di tangenti coniugate:

2) ogni punto di t_1 ha, rispetto ad essa e rispetto a $\mathcal{A}$, il medesimo piano polare.

(Cb) $a_{31} \neq a_{32}$. Divisori elementari $(1-\varrho)^3$ $(1-\varrho)$. I punti fondamentali sono i punti di τ_1; i piani fondamentali sono i piani per t_1. Le due quadriche d'incidenza φ_1, φ_2, si toccano lungo quella coppia di tangenti coniugate di F che divide armonicamente t_1 e τ_1. Un punto qualsiasi di t_1 ha lo stesso piano polare rispetto alle tre quadriche φ_1, φ_2 e $\mathcal{A}$.

7. Con la stessa facilità, si potrebbero caratterizzare le omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie *rigata*. Del resto, per una rigata esiste anche un ampio gruppo di omografie e correlazioni che conserva quattro rette successive, anche queste omografie e correlazioni si caratterizzano facilmente, facendo uso delle *tangenti flecnodali*.

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita di diagrammi costituiti da una successione di archi di linee diverse.* Nota dell'ing. LETTERIO LABOCCETTA, presentata dal Corrispondente A. CROCCO.

Si presenta frequentemente nella fisica, ed anche in molte questioni tecniche, il caso di dover rappresentare una grandezza la quale, in diversi intervalli del campo della variabile, è espressa da funzioni diverse della variabile stessa. Avviene cioè che, portando i valori della variabile come ascisse sull'asse delle x, si hanno, su questo, n successivi intervalli, fisicamente distinti,

$$(1) \qquad -\infty\, x_1\,,\, x_1\, x_2\,, \ldots\, x_{i-1}\, x_i \ldots\, x_{n-1} + \infty\,,$$

in ciascuno dei quali il diagramma rappresentativo è costituito da un arco di curva appartenente ad una delle linee

$$(2) \qquad y_1 = F_1(x) \ldots \quad y_i = F_i(x) \ldots \quad y_n = F_n(x)\,.$$

Si voglia costruire l'equazione di questo diagramma, con esclusione però degli archi delle dette linee che non fanno parte di esso.

A tale scopo si formino, nel modo come si dirà in appresso, delle funzioni « limitatrici » $\varphi_i\binom{1}{0}$ le quali godano la proprietà di avere costantemente il valore $+1$ nell'intervallo i^{mo}, cioè per tutti i valori della variabile compresi fra x_{i-1} e x_i, e costantemente il valore zero per ogni altro valore della variabile da $-\infty$ a $+\infty$. Ciò posto, è chiaro che, se si forma la funzione

$$y = F_1(x)\,\varphi_1\binom{1}{0} + \cdots + F_i(x)\,\varphi_i\binom{1}{0} + \cdots F_n(x)\,\varphi_n\binom{1}{0}, \tag{3}$$

essa nel primo intervallo prenderà i valori corrispondenti a quelli della funzione $y_1 = F_1(x)$, nell'intervallo i^{mo} prenderà i valori della funzione $y_i = F_i(x)$ e così via, e costituirà perciò la rappresentazione analitica cercata del diagramma.

Questo metodo di rappresentazione si potrebbe chiamare il metodo dell'« annullamento delle funzioni ».

In pratica è frequente il caso in cui tutte le funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono della stessa natura e dipendenti dallo stesso numero m di parametri, cosicchè differiscono soltanto per i valori delle m costanti che appariscono nella espressione del loro valore. Posto che la forma generale di queste funzioni sia

$$y_i = F(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}, x), \tag{4}$$

si formi la funzione

$$y = F\left\{\prod_{i=1}^{i=n} a_{i1}^{\varphi_i\binom{1}{0}}, \ldots, \prod_{i=1}^{i=n} a_{im}^{\varphi_i\binom{1}{0}}, x\right\} \tag{5}$$

avente anche la forma della (4) ma nella quale ognuna delle costanti a_{ij} sia sostituita dal prodotto $a_{1j}^{\varphi_1\binom{1}{0}} \cdot a_{2j}^{\varphi_2\binom{1}{0}} \ldots a_{nj}^{\varphi_n\binom{1}{0}}$ delle corrispondenti costanti di tutte le n equazioni, ciascuna costante a_{ij} elevata alla potenza indicata dall'esponente $\varphi_i\binom{1}{0}$ che è una funzione limitatrice, come definita innanzi, cosicchè in ogni intervallo i prodotti della (5) si ridurranno ai semplici parametri della (4) corrispondente.

Così dunque la (5) è una funzione di forma costante ma che in ogni intervallo ha parametri di valore diverso.

Questo metodo di rappresentazione potrebbe chiamarsi il metodo della « variazione delle costanti ».

Il problema proposto trovasi così risoluto in modo generale, a condizione tuttavia di saper costruire le funzioni limitatrici $\varphi_i\binom{1}{0}$. Si può giungere in varî modi a formare delle funzioni di questa specie: basterà qui indicarne uno con riferimento ai tre casi che possono presentarsi per la posizione dell'intervallo i^{mo}:

a) che la funzione debba avere il valore zero nell'intervallo $(-\infty, a)$ a sinistra di un punto A di ascissa a e debba avere il valore $+1$ nell'intervallo $(a, +\infty)$ a destra dello stesso punto;

b) che la funzione debba avere il valore $+1$ nell'intervallo $(-\infty, a)$ a sinistra del punto A e debba invece avere il valore zero nell'intervallo $(a, +\infty)$ a destra dello stesso punto;

c) che la funzione debba avere il valore zero nell'intervallo $(-\infty\,,a)$, il valore $+1$ nell'intervallo $(a\,,b)$ di lunghezza l compreso fra il punto A e un punto B di ascissa b e, di nuovo, il valore zero a destra del punto B nell'intervallo $(b\,,+\infty)$.

Cominciando dal primo caso, e supponendo, per maggiore semplicità, che il punto A cada nell'origine, cioè che $a=0$, si costruisca la funzione

$$(6)\qquad \varphi_2\left({}^1_0\right)=\frac{1}{2}\Big[\,1+sgn\,x\,\Big]$$

dove, seguendo le notazioni di Kronecker e Weierstrass, si è posto $sgn\,x=\dfrac{x}{|x|}$, si è indicato cioè con $sgn\,x$ la funzione « segno di x » che è $+1$ per tutti i valori positivi di x e -1 per tutti i valori negativi di x.

La (6) ha evidentemente la proprietà di essere nulla per tutti i valori negativi di x, $sgn\,x=-1$, cioè nel primo intervallo del campo considerato, e di prendere il valore $+1$ per tutti i valori positivi di x, $sgn=+1$, cioè nel secondo degli intervalli in cui è diviso il campo. Se il punto A, invece di coincidere con l'origine, ha per ascissa $+a$, o $-a$, la funzione diventa rispettivamente

$$(7)\qquad \varphi_2\left({}^1_0\right)=\frac{1}{2}\Big[\,1+sgn(x-a)\,\Big]$$

$$(8)\qquad \varphi_2\left({}^1_0\right)=\frac{1}{2}\Big[\,1+sgn(x+a)\,\Big]$$

conservando sempre la stessa proprietà di essere nulla a sinistra di A e di avere il valore $+1$ a destra dello stesso punto.

Il secondo caso si deduce immediatamente dal primo cambiando semplicemente in $-$ il segno $+$ del binomio fra parentesi, nelle (6), (7), (8), e si hanno così per le funzioni che prendono il valore $+1$ a sinistra, nel primo intervallo, ed il valore zero a destra di un punto dato A, le espressioni

$$(9)\qquad \varphi_1\left({}^1_0\right)=\frac{1}{2}\Big[\,1-sgn\,x\,\Big]$$

$$(10)\qquad \varphi_1\left({}^1_0\right)=\frac{1}{2}\Big[\,1-sgn(x-a)\,\Big]$$

$$(11)\qquad \varphi_1\left({}^1_0\right)=\frac{1}{2}\Big[\,1-sgn(x+a)\,\Big].$$

Resta da trattare il terzo caso e per questo si farà uso della funzione « intiero di x » di Legendre, adottando per essa la notazione $\mathrm{I}x$, con la quale si intende di indicare il « minimo intiero contenuto in x », vale a dire l'ultimo degli intieri che precedono x a sinistra e quindi, nel caso di x positivo, la parte intiera di x senz'altro e, nel caso di x negativo, la parte intiera aumentata di una unità.

Ciò posto, supponendo di nuovo che A cada nell'origine, $a = 0$ e B a destra di esso, cosicchè sia $b = l$, si scorge che la funzione

$$\left(\mathrm{I}\frac{l}{|x|}\right)^{\mathrm{I}\frac{|x|}{l}} \tag{12}$$

ha la proprietà: di essere sempre nulla nell'intervallo $(-\infty\,,\,-l)$ nel quale è sempre $|x| > l$ e quindi $\mathrm{I}\frac{l}{|x|} = 0$; di avere sempre il valore $+1$ nell'intervallo $(-l\,,\,+l)$ nel quale è sempre $|x| < l$ e quindi $\mathrm{I}\frac{|x|}{l} = 0$ (con l'avvertenza, tuttavia, che il punto $x = 0$ è un punto singolare) di avere sempre il valore zero nell'intervallo $(+l + \infty)$ nel quale si ha di nuovo $|x| > l$ come nel primo intervallo.

Se si combina perciò la (12) con una funzione del tipo della (6), scrivendo

$$\varphi_2\left(\tfrac{1}{0}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + sgn x\right]\left[\mathrm{I}\frac{l}{|x|}\right]^{\mathrm{I}\frac{|x|}{l}}, \tag{13}$$

si ha una funzione che ha il valore $+1$ nel secondo intervallo $(0\,,\,+l)$ ed è nulla nel resto del campo.

Dalla (13) si passa facilmente al caso in cui il punto A, invece di cadere nell'origine, abbia per ascissa $+a$ ed il punto B abbia corrispondentemente per ascissa $a + l$. Basta infatti scrivere

$$\varphi_2\left(\tfrac{1}{0}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + sgn\,(x-a)\right]\left[\mathrm{I}\frac{a+l}{|x|}\right]^{\mathrm{I}\frac{|x|}{a+l}} \tag{14}$$

combinando la (7) con la (12) dopo aver posto in questa $a + l$ in luogo di l.

Analogamente, se il punto A ha per ascissa $-a$, combinando la (8) con la (12) dopo aver posto in questa $x + a$ invece di x viene

$$\varphi_2\left(\tfrac{1}{0}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + sgn(x + a)\right]\left[\mathrm{I}\frac{l}{|x + a|}\right]^{\mathrm{I}\frac{|x+a|}{l}}. \tag{15}$$

In tal modo la funzione $\varphi_2\left(\tfrac{1}{0}\right)$ resta costruita per tutti i casi che possono presentarsi.