ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Matematica. — *Sopra un tipo di equazioni integrali non lineari.* Nota II di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Analogamente, se poniamo

$$h(x) - w_3(x) = u_3(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x\,,y\,;h(y) - w_2(y)]\,dy =$$
$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x\,,y\,;u_2(y)]\,dy\,,$$

sostituendo alla $u(x)$ il suo valore dato dalla (1), si ottiene

$$w_3(x) = \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ \mathrm{K}^{(r)}[x\,,y\,;\,h(y) - w_2(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x\,,y\,;h(y)] \right\} dy =$$
$$= -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} w_2(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{h(y)}\,[x\,,y\,;h(y) - \theta_2^{(r)}\,w_2(y)]\,dy\,.$$

E poichè

$$h(y) - \theta_2^{(r)}\,w_2(y) = u(y) + w_1(y) - \theta_2^{(r)}\,w_2(y)\,,$$

con

$$|\,w_1(y) - \theta_2^{(r)}\,w_2(y)\,| < 2\sigma\,,$$

avremo

$$w_3(x) < |\,\lambda\,|\,\varrho\sigma \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} |\,\mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}\,[x\,,y\,;u(y) + \{w_1(y) - \theta_2^{(r)}\,w_2(y)\}]\,|\,dy$$
$$< |\,\lambda\,|\,pm\varrho\sigma = \varrho^2\sigma\,.$$

Così continuando, avremo in generale $|\,w_n(x)\,| < \sigma\varrho^{n-1}$ e quindi, per essere $\varrho < 1$, $\lim\limits_{n=\infty} |\,w_n(x)\,| = 0$. La funzione $h(x) = \lim\limits_{n=\infty} u_n(x)$ sarà perciò una soluzione della (1), sempre sotto la condizione che valga la (4). Ora passeremo a dimostrare che tale condizione è realmente soddisfatta.

5. Ricordiamo, a tale scopo, che per le $u_n(x)$ abbiano trovato le seguenti espressioni:

$$u_1(x) = u(x)$$
$$u_n(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}\,[x\,,y\,;u_{n-1}(y)]\,dy = u(x) + \psi_{n-1}(x)\,.$$
$$(n = 2\,,3\,,4\,,\ldots)$$

Posto allora $|u(x)| < \nu$, ed ammesso che sia

$$\int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x, y; o]\, dy = 0 \ (^1), \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

per la $u_2(x)$ possiamo scrivere

$$u_2(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u_1(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x, y; o] \right\} dy =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} u_1(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta^{(r)} u_1(y)]\, dy; \quad (o < \theta^{(r)} < 1)$$

da cui si deduce

$$|u_2(x)| < \nu + |\lambda| \nu \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} |\mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta^{(r)} u(y)]|\, dy;$$

e, per la (2) della Nota precedente

$$|u_2(x)| < \nu + |\lambda| pm\nu = \nu(1 + \varrho).$$

6. Per la $u_3(x)$ scriviamo

$$u_3(x) - u(x) -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u(y) + \psi_1(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u(y)] \right\} dy + \Phi(x),$$

dove

$$\Phi(x) = -\lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u(y)]\, dy = -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} u(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y; \theta_0^{(r)} u(y)]\, dy;$$

con $o < \theta_0^{(r)} < 1$; ed anche, applicando il teorema del valor medio,

$$u_3(x) = u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \psi_1(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_1^{(r)} \psi_1(y)]\, dy. \ (o < \theta_1^{(r)} < 1)$$

E poichè

$$|\Phi(x)| < |\lambda| pm\nu = \varrho\nu,$$

supposto, pel momento, che sia $|\psi_1(x)| < \sigma$, avremo

$$|u_3(x)| < \nu + |\lambda| pm\varrho\nu + \varrho\nu = \nu(1 + \varrho + \varrho^2);$$

e quindi anche

$$|\psi_2(x)| < \nu(\varrho + \varrho^2).$$

7. Analogamente, per la u_4 scriviamo

$$u_4(x) = u(x) -$$

$$- \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \left\{ \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u(y) + \psi_2(y)] - \mathrm{K}^{(r)}[x, y; u(y)] \right\} dy + \Phi(x) =$$

$$= u(x) - \lambda \sum_{r=1}^{p} \int_{\mu_r(x)}^{g_r(x)} \psi_2(y)\, \mathrm{K}'^{(r)}_{u(y)}[x, y; u(y) + \theta_2^{(r)} \psi_2(y)]\, dy + \Phi(x);$$

$$(o < \theta_2^{(r)} < 1)$$

(1) Questa condizione non è essenziale; qui fu posta unicamente per semplicità.

per cui, supposto che sia $|\psi_2(y)| < \sigma$, avremo

$$u_4(x) < \nu + |\lambda| pm\nu(\varrho + \varrho^2) + \varrho\nu = \nu(1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3).$$

Operando similmente sulla $u_5(x)$ e sulle successive e supponendo che, per ogni valore di n, sia

$$(5) \qquad |\psi_n(x)| < \sigma,$$

otterremo

$$|u_n(x)| < \nu(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots + \varrho^{n-1});$$

e quindi anche

$$|\psi_{n-1}(x)| < \nu\,[\varrho + \varrho^2 + \dots + \varrho^{n-1}] < \frac{\nu\varrho}{1-\varrho}.$$

Avremo di conseguenza

$$|h(x) - u(x)| = \lim_{n=\infty} |u_n(x) - u(x)| = \lim_{n=\infty} |\psi_{n-1}(x)| < \frac{\nu\varrho}{1-\varrho}.$$

Mediante la trasformazione indicata al n. 2, avendo ottenuto che sia $\varrho < k < \dfrac{\sigma}{\nu + \sigma}$, rimangono verificate contemporaneamente tanto la condizione (4) quanto la (5).

Relatività. — *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria.* Nota II di ENRICO FERMI, presentata dal Corrispondente G. ARMELLINI.

3. Prima di passare all'applicazione fisica dei risultati ottenuti, vogliamo ancora fare qualche osservazione geometrica. È evidente intanto che le considerazioni precedenti, e quindi anche la formula (5) che ne è la conclusione, che per varietà qualunque sono valide solo vicino ad L, sono invece completamente rigorose per spazî euclidei. Associamo allora alla linea L della V_n una linea L^* di uno spazio euclideo S_n, in cui indichiamo con x_i^* le coordinate cartesiane ortogonali. Se con degli asterischi indichiamo i simboli riferentisi alla linea L^*, potremo scrivere per S_n la formula analoga a (5):

$$(5)^* \quad ds^2_{M^*} = (1 + C^* \times M^* - P^*)\, ds^2_{P^*} + d\bar{y}_1^{*2} + d\bar{y}_2^{*2} + \dots + d\bar{y}_{n-1}^{*2};$$

come nella (5) C è funzione di s_P, così nella $(5)^*$ C^* è funzione di s_{P^*}.

Siano $K^{(1)} K^{(2)} \dots K^{(n-1)}$ le componenti controvarianti di C relative a $\bar{y}_1\, \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{n-1}$ e $K^{(1)*} K^{(2)*} \dots K^{(n-1)*}$ quelle di C^* relative alle $\bar{y}^*$. Cerchiamo se si possa determinare L' in modo che le funzioni $K^{(r)*}(s_P)$ diventino eguali alle $K^{(r)}(s_P)$. Cominceremo perciò a porre $s_P = s_{P^*}$, cioè a stabilire tra i punti di L e quelli di L^* una corrispondenza biunivoca che conserva