ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota II di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

6. *In pratica*, data Γ mediante le (4), si calcolino i coefficienti della corrispondente equazione (5), poi quelli della (13) con le formule (12) (ma scritte per $A = du$)

$$\pi = \gamma - \beta^2 - \beta' \quad , \quad \chi = \delta - 3\beta\gamma' + 2\beta^3 - \beta'' \, , \tag{13'}$$

indi θ_3 con la (16): si ha così il differenziale normale (17) che è l'*elemento lineare proiettivo* $d\sigma$. Poi si calcoli p_2 con le (15) (ponendovi per S la derivata logaritmica di $\sqrt[3]{\theta_3} = a_1$); poi i valori ottenuti per a_1 e p_2 si sostituiscano nelle (18) e (19) ([15]).
(Ma naturalmente si può anche operare riferendosi ad un altro A qualunque).

Infine, per costruire la normale n (non la tangente t, evidentemente), è *per ora* indispensabile procurarsi il punto N, quindi le coordinate normali di P: queste si ottengono (con una quadratura) moltiplicando le (4) per λ dato dalla (10) ([16]).

([15]) Segue, da ciò, che θ_3 e p_2 dipendono *dalle derivate dei primi 6 e 7 ordini rispett. di x, y, z. p_2 è il primo invariante relativo* di Γ costruito da Halphen per altre vie. La costruzione di tutti gli invarianti relativi dipendenti dalle derivate dei primi 7, 8 o 9 ordini, eseguita pure da Halphen, qui è semplicissima *e per ogni ordine di derivate*, perchè:

1°) *Invariante relativo dipendente dalle derivate dei primi 7 ordini è ogni funzione di h_3, θ_3 e p_2 che sia covariante*; p. es. $h_3 + 5\theta_3 - a_1 p_2$, $\sqrt{3\theta_3 h_3^2 + a_1^3 p_2^3}\,/\,(h_3 + \theta_3)$, ecc.

2°) *Le derivate covarianti successive $p_3, p_4, \ldots$ di p_2 sono invarianti relativi dipendenti dalle derivate dei primi 7, 8... ordini rispettivamente.* Quindi:

3°) *Ogni funzione $f(h_3, \theta_3, p_2, p_3, \ldots p_{2+n})$ che sia covariante è invariante relativo dipendente dalle derivate dei primi $7 + n$ ordini.*

Nella trattazione del Wilczynski il posto di p_2 è tenuto da $\theta_8 = -27\theta_3^2 p_2$ che è covariante di ordine (*peso*) 8; gli altri invarianti relativi vi si deducono da θ_3 e θ_8 con un certo *procedimento Jacobiano*.

([16]) Ma, in seguito, si potrà fare a meno della normalizzazione delle coordinate (quindi della quadratura); perchè daremo una definizione *geometrica* di n (ed anche di T e N) (n. 13) che permetterà di determinarla *con sole operazioni algebriche e di derivazione*.

7. Come $\boldsymbol{\Gamma}$ (o una collineare) individua i differenziali A (17) e K (18) (a meno di una trasformazione del parametro u), così viceversa: *due differenziali* $\mathrm{A} = a_1\, du$ $(a_1 \neq 0)$ *e* $\mathrm{K} = k_1\, du$ *individuano (a meno di una collineazione) una curva* $\boldsymbol{\Gamma}$ *di cui* A *e* K *sono l'elemento lineare e l'angolo di contingenza, quindi* $\mathrm{I} = \mathrm{K} : \mathrm{A}$ *la curvatura; le coordinate normali* x, y, z *di un suo punto generico costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di*

$$\varphi_3 + a_1^2\, \mathrm{I}\, \varphi_1 + a_1^2 (a_1 + \mathrm{I}_1/2)\, \varphi = 0 \quad (^{17}), \tag{22}$$

le derivate covarianti essendo prese rispetto ad A.

Applicando le (8) alla (22), si ha

$$|\, x\, x_1\, x_3 \,| = 0 \quad , \quad a_1^2\, \mathrm{I} = |\, x\, x_2\, x_3 \,| : |\, x\, x_1\, x_2 \,| \,; \tag{23}$$

ma $|\, x\, x_1\, x_3 \,| = |\, x\, x_1\, x_2 \,|_1 = |\, x\, x_1\, x_2 \,|' - 3\,\mathrm{S}\, |\, x\, x_1\, x_2 \,|$; quindi la 1ª integrata dà, per la (3), $|\, x\, x_1\, x_2 \,| = a_1^3$ [18]. Dunque: *in coordinate normali* $x\, y\, z$ *valgono le formole*

$$\theta_3 = a_1^3 = |\, x\, x_1\, x_2 \,| \quad , \quad \mathrm{I} = |\, x\, x_2\, x_3 \,| : a_1^5 \,. \tag{24}$$

In particolare, se come parametro u si sceglie l'arco σ, è $a_1 = 1$ ed I funzione di σ; e si ha: *una curva* $\boldsymbol{\Gamma}$ *è individuata a meno di una coll. dalla sua «equazione intrinseca proiettiva»* $\mathrm{I} = \mathrm{I}(\sigma)$; *le coordinate normali di un suo punto costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di*

$$\varphi_3 + \mathrm{I}\varphi_1 + (1 + \mathrm{I}_1/2)\, \varphi = 0 \quad (^{19}), \tag{22'}$$

e si possono supporre tali che sia

$$|\, x\, x_1\, x_2 \,| = 1 \quad , \quad \mathrm{I} = |\, x\, x_2\, x_3 \,| \,, \tag{24'}$$

le derivate (ordinarie) essendo fatte rispetto a σ.

Osservazione — σ è un primo *invariante* (integrale) *assoluto* di $\boldsymbol{\Gamma}$; *segue* I, che dipende dalle derivate dei primi 7 ordini di x, y, z (o 3 per coordinate normali); *poi* $\mathrm{I}_1 : a_1$, $\mathrm{I}_2 : a_1^2$, $\mathrm{I}_3 : a_1^3$, ... nei quali il massimo ordine delle derivate aumenta di 1 successivamente. *Ogni altro invariante assoluto è una funzione (qualsiasi) dei precedenti.*

(17) È la (11) ove si è posto $3p_2 = a_1^2\, \mathrm{I}$, per la (19), e $q_3 = \theta_3 + 3p_2/2 = a_1^3 + a_1^2 \mathrm{I}/2$ per le (16), (17) e (19).

(18) La costante d'integrazione si può supporre uguale a 1, disponendo del fattore numerico per cui è lecito moltiplicare le coordinate normali; cfr. (13).

(19) Questa equazione è chiamata *forma canonica di Halphen* della (5) dal Wilczynski, loc. cit. (2), pag. 61; il quale invece fa uso costante della più semplice *forma canonica di Laguerre-Forsyth, che è* $\varphi''' + \theta_3\, \varphi = 0$. Ma per ridurre la (5) a tal forma, *occorre risolvere una equazione di Riccati*, mentre che per ridurla alla (22') bastano *due quadrature*, la (10) e la $\sigma = \int a_1\, du$ con $a_1 = \sqrt[3]{\theta_3}$; inoltre essa non è intrinseca come la (22').

8. L'inviluppo delle normali n è l'*evoluta proiettiva* di Γ, che ne è l'*evolvente proiettiva*.

L'evoluta di Γ *è il luogo dei suoi centri di curvatura*. Perchè le derivate delle coordinate di tal punto $C(x + x_2/I, ...)$ (n. 5) [20] sono $x_1 + x_3/I - x_2 I_1/I^2 = -(1 + I/2)x/I - x_2 I_1/I^2, ...$ per la (22′), quindi definiscono un punto della stessa n.

Dirò *cerchi proiettivi* le curve le cui normali concorrono in un punto (*centro*). *Essi sono caratterizzati dall'equazione intrinseca* $I = 2\sigma$ [21].

Infatti, affinchè C sia un punto fisso, occorre che siano costanti le sue coordinate non omogenee $(Ix + x_2)/(Iz + z_2)$, $(Iy + y_2)/(Iz + z_2)$: uguagliando a zero le loro derivate ed eliminando x_3, y_3, z_3 mediante la (22′), si hanno le equazioni $(I_1 - 2)(xz_2 - zx_2) = 0$, $(I_1 - 2)(yz_2 - zy_2) = 0$ che, per la 1ª delle (24′), sono compatibili solo quando $I_1 = 2$, ossia $I = 2\sigma + c$, con c costante (che si può supporre nulla con opportuna scelta dell'origine degli archi σ).

9. I punti P, T, N sono vertici di un triangolo (che dirò *normale*) di cui due lati sono le rette t, n che inviluppano Γ e la sua evoluta: *il terzo lato* TN *inviluppa la curva luogo del punto* T, perchè le derivate $x_2, ...$ delle coordinate $x_1, ...$ di T sono le coordinate di N (supposto le $x, ...$ normali; cfr. n. 5).

Per lo studio proiettivo di Γ nell'intorno di un suo punto P, è naturale assumere come triangolo di riferimento quello normale, perchè definito *in modo intrinseco ed invariante per coll.* Ora le coordinate di ogni punto M del piano sono combinazioni lineari di quelle di P, T, N,

$$Xx + Yx_1 + Zx_2 \quad , \quad Xy + Yy_1 + Zy_2 \quad , \quad Xz + Yz_1 + Z_2 \tag{25}$$

ed i coefficienti X, Y, Z sono appunto le coordinate di M rispetto a TPN (coordinate *locali*) e col punto unità $U(x + x_1 + x_2, ...)$.

Supponendo che M stia su Γ in un intorno di P, la sua 1ª coordinata (non locale) può svilupparsi in serie di potenze dell'arco $PM = \sigma$ che arresterò al termine in σ^9:

$$x + x_1\sigma + x_2\sigma^2/2! + \cdots + x_9\sigma^9/9! + R_{10} \text{ [22]}. \tag{26}$$

I coefficienti sono i valori di x e delle sue derivate rispetto a σ calcolatate in P, cioè per $\sigma = 0$, e sono tutte esprimibili linearmente in funzione dei primi tre x, x_1, x_2, mediante la (22′) con $f = x$ e quelle che se ne deducono derivando. Eseguendo il calcolo, dopo aver posto

$$I = 2l, \tag{27}$$

[20] Da ora innanzi (fino al n. 17) supporrò, come è lecito, che sia P l'origine degli archi σ su Γ ed $u = \sigma$, quindi $u_1 = 1$.

[21] Per la loro determinazione effettiva occorre integrare la (22′), che diventa $\varphi''' + 2\sigma\varphi' + 2\varphi = 0$ ed ammette l'integrale primo $\varphi'' + 2\sigma\varphi =$ costante, ma che si lascia integrare solo mediante serie.

[22] In generale indicherò con R_n un resto infinitesimo con σ di ordine n.

e sostituendo in (26), si ha un'espressione del tipo della 1ª delle (25), con

$$
(28)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & 1 - (1 + l_1)\,\sigma 3/3\,! - l_2 \sigma 4/4\,! + (2l + 2ll_1 - l_3)\,\sigma 5/5\,! + \\ & + (1 + 8l_1 + 7l_1^2 + 2ll_2 - l_4)\,\sigma 6/6\,! - (4l^2 + 4l^2 l_1 - 17 l_2 - \\ & - 25 l_1 l_2 - 2ll_3 + l_5)\,\sigma 7/7\,! - (4l + 40ll_1 + 36ll_1^2 + \\ & + 4l_2 l^2 - 25 l_2^2 - 31 l_3 - 41 l_1 l_3 - 2ll_4 + l_6)\,\sigma 8/8\,! - (1 - \\ & - 8l^3 + 21 l_1 - 8l^3 l_1 + 111 l_1^2 + 91 l_1^3 + 108 ll_1 l_2 + 4l^2 l_3 - \\ & - 91 l_2 l_3 - 51 l_4 - 63 l_1 l_4 - 2ll_5 + l_7)\,\sigma 9/9\,! + R_{10}\,, \end{aligned} \right.
$$

$$
(28)_2 \quad \left\{ \begin{aligned} Y = {} & \sigma - 2l\sigma 3/3\,! - (1 + 3l_1)\,\sigma 4/4\,! + (4l + 20ll_1 - 5l_3)\,\sigma 6/6\,! + \\ & + (1 + 12 l_1 + 27 l_1^2 + 40 ll_2 - 8l^3 - 6l_4)\, 67/7\,! - (12 l^2 + \\ & + 84 l^2 l_1 - 29 l_2 - 119 l_1 l_2 - 70 ll_3 - 7 l_5)\, 68/8\,! - (6l - \\ & - 16 l^4 + 96 ll_1 + 314 ll_1^2 + 224 l^2 l_2 - 144 l_2^2 - 66 l_3 - \\ & - 230 l_1 l_3 - 112 ll_4 + 8 l_6)\,\sigma 9/9\,! + R_{10}\,, \end{aligned} \right.
$$

$$
(28)_3 \quad \left\{ \begin{aligned} Z = {} & \sigma 2/2\,! - 2l\sigma 4/4\,! - (1 + 5l_1)\,\sigma 5/5\,! + (4l^2 - 9l_2)\,\sigma 6/6\,! + \\ & + 2\,(2l - 14 ll_1 - 7 l_3)\,\sigma 7/7\,! + (1 - 8l^3 + 16 l_1 + 55 l_1^2 + \\ & + 68 ll_2 - 20 l_4)\,\sigma 8/8 - (12 l^2 + 108 l^2 l_1 - 45 l_2 - \\ & - 297 l_1 l_2 - 138 ll_3 + 27 l_5)\,\sigma 9/9\,! + R_{10}\,. \end{aligned} \right.
$$

Queste valgono per ogni punto **M** *di* $\boldsymbol{\Gamma}$ *in un intorno di* P.

Mineralogia. — *Sulla celestite del calcare madreporico della Provincia di Messina* [1]. Nota III del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Corrisp. F. Zambonini.

È notevole il fatto, che delle combinazioni osservate nei cristalli di Tremonti, nessuna se ne presenti in quelli del vallone Marro, o si ripeta per i cristalli di monte Viale, nei quali è costante il prisma {104}, da me non rinvenuto. I cristalli di monte Viale sono inoltre molto più ricchi in faccie di quelli da me descritti. Tutte le combinazioni da me notate in questi ultimi sono già note, invece, nella celestite dei giacimenti solfiferi. Si ha, perciò, un nuovo esempio di somiglianze morfologiche fra cristalli di giacimenti molto differenti per età, formazione, ecc. e di differenza, invece, considerevoli fra quelli di giacimenti che presentano le più strette analogie. Anche le costanti cristallografiche della celestite di Tremonti si allontanano da quelle che Billows ha calcolato per i cristalli di monte Viale, mentre

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.