ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet appartenenti ai generi della specie principale.* Nota II del dottor ALBERTO MARIO BEDARIDA, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

3. — Sia H una classe di forme di Dirichlet a determinante D; le forme, i cui coefficienti sono coniugati dei coefficienti delle forme di H, costituiscono una classe di forme, a determinante D, che diremo *classe coniugata* alla forma H e s'indicherà con H_0.

Abbiamo ora il lemma I): *componendo una classe* H *con la sua coniugata* H_0 *si ottiene una classe razionale.*

La questione è ovvia se H è razionale. Sia dunque H complessa e determiniamo in H ed in H_0 due forme coniugate e *concordanti* [1]. Consideriamo una forma (a, b, c) di H, la forma (a_0, b_0, c_0) apparterrà ad H_0 e non siano concordanti, cioè i numeri a, a_0 e $b + b_0$ non siano primi tra di loro. Si può ritenere a primo con 2D e quindi con $2b = 2b_1 + 2ib_2$: gli interi razionali a_1, a_2, $2b$ e $2b_2$ ove a_1 ed a_2 sono la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di a, saranno primi tra di loro. Ciò posto, applichiamo alla forma (a, b, c) la sostituzione aritmetica $\begin{pmatrix} 1 . 0 \\ x . 1 \end{pmatrix}$, ove x è un intero razionale: si otterrà (a'_1, b'_1, c); applicandola alla (a_0, b_0, c_0) si avrà la forma (a'_0, b'_0, c). Si tratta di vedere che si può scegliere x in modo che i coefficienti a', a'_0 e $b' + b'_0$ siano primi tra di loro, cioè che lo siano a'_1, a'_2 e $2b'_1$, essendo a'_1 ed a'_2 rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di a' e b'_1 la parte reale di b'.

Per le relazioni che sussistono tra i coefficienti di due forme equivalenti, si può scrivere:

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 + 2b_1 x + c_1 x^2 \\ a'_2 &= a_2 + 2b_2 x + c_2 x^2 \\ 2b'_1 &= 2b_1 + 2c_1 x , \end{aligned}$$

ove c_1 e c_2 sono rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di c. Ora, manifestamente, $a'_1 . a'_2$ e $2b'_1$ saranno primi tra di loro se tali sono i tre numeri: $a_1 = a_1 - 2b'_1 x$, $2b_1 + 2c_1 x$, $a_2 + 2b_2 x + c_2 x^2$.

[1] Cfr. Dirichlet-Dedekind: *Teoria dei numeri*, traduzione di A. Faifofer, pag. 379; oppure Bianchi, op. cit.

A quest'ultima condizione si può soddisfare disponendo opportunamente di x. Infatti, basterà provare che, preso un fattore primo u_i di a_1, si può scegliere un valore α_i di x, per modo che si abbia una delle incongruenze:

$$2b_1 + 2c_1\alpha_i \not\equiv 0 \pmod{u_i}$$
$$a_2 + 2b_2\alpha_i + c_2\alpha_i^2 \not\equiv 0 \pmod{u_i}.$$

Ciò è sempre possibile: perchè, nel caso opposto, u_i dovrebbe dividere $2b_1$, $2b_2$, a_2, ed a_1 contro l'ipotesi. Procedendo nel medesimo modo per tutti i fattori primi diversi di a_1, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ e prendendo poi:

$$x \equiv \alpha_1 \pmod{u_1}, x \equiv \alpha_2 \pmod{u_2}, \ldots, x \equiv \alpha_m \pmod{u_m},$$

sarà raggiunto lo scopo.

Se dunque (a, b, c) ed (a_0, b_0, c_0) sono due forme rispettivamente di H e di H_0, coniugate e concordanti, si potrà considerare un intero razionale B, che soddisfi alle congruenze:

$$B \equiv b \pmod{a}, \quad B \equiv b_0 \pmod{a_0}, \quad B^2 \equiv D \pmod{aa_0}$$

e quindi, ponendo $C = \dfrac{B^2 - D}{a\,a_0}$, C è intero razionale, e la classe composta $H\text{-}H_0$, contenendo la forma (aa_0, B, C) è razionale, c. v. d.

Della classe H consideriamo ora l'opposta della coniugata, H_0^{-1}: procedendo in modo analogo a quello seguito nel lemma precedente, si prova l'esistenza di due forme (a, b, c) ed $(a_0, -b_0, c_0)$, appartenenti ad H ed H_0^{-1} rispettivamente e concordanti. Si ha allora il lemma II): *componendo una classe* H, *con l'opposta della coniugata* H_0^{-1}, *si ottiene una classe del tipo* P [1].

4. — Le considerazioni del numero precedente ci permettono ora di dimostrare che non esistono altre categorie, oltre quelle notate al n. 2, di classi di forme di Dirichlet, a determinante D, appartenenti ai generi delle specie principale.

Sia K una classe di forme di Dirichlet, appartenente ai generi suddetti, ed indichiamo con f una sua forma.

Se $D \equiv 3 \pmod{4}$ oppure $D \equiv 0 \pmod{2}$, esiste certamente una forma di Gauss f_1, a determinante D, primitiva di prima specie, la quale

[1] Questo lemma e il suo precedente risultano pure, come è ben naturale, ricorrendo alle formule generali di composizione delle forme date da Gauss nelle sue *Disquisitiones*. Noi però abbiamo preferito seguire il metodo di composizione delle forme date da Dirichlet, e cioè ricorrendo alla nozione di forme concordanti, perchè appunto sotto questa forma più elegante viene comunemente esposta la teoria della composizione delle forme aritmetiche.

abbia gli n caratteri (¹) relativi agli n fattori primi razionali, dispari, diversi, soddisfacenti alle condizioni:

$$(3)\qquad \left(\frac{f_1}{p_1}\right)=+1,\left(\frac{f_1}{p_2}\right)=+1,\ldots,\left(\frac{f}{p_r}\right)=+1,$$

$$\left(\frac{f_1}{q_1}\right)=\left[\frac{f}{\pi_1}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{1_0}}\right],\left(\frac{f_1}{q_2}\right)=\left[\frac{f}{\pi_2}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{2_0}}\right],\ldots$$

$$\left(\frac{f}{q_s}\right)=\left[\frac{f}{\pi_s}\right]=\left[\frac{f}{\pi_{s_0}}\right],$$

perchè i caratteri delle forme di Gauss sono, nel caso attuale, $n+1$ oppure $n+2$ e possiamo quindi disporre di almeno uno oltre i caratteri $\left(\frac{f_1}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f_1}{q_j}\right)$ per rendere soddisfatta la nota relazione fra i caratteri. La forma f_1, considerata nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ha anche i caratteri α, β e γ (od alcuni di essi) aventi per valori $+1$. Consideriamo la classe R_1 di forme di Dirichlet a cui f_1 appartiene; R_1 sarà razionale. La classe $K.R_1$ appartiene al genere principale; perchè dalle (2) e (3), si ha subito:

$$\left[\frac{ff_1}{p_1}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{p_2}\right]=+1,\ldots,\left[\frac{ff_1}{p_r}\right]=+1,$$

$$\left[\frac{ff_1}{\pi_1}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{\pi_2}\right]=+1,\ldots,\left[\frac{ff_1}{\pi_s}\right]=+1,\left[\frac{ff_1}{\pi_{1_0}}\right]=+1,$$

$$\left[\frac{ff_1}{\pi_{2_0}}\right]=+1,\ldots,\left[\frac{ff_1}{\pi_{s_0}}\right]=+1,\alpha=+1,\beta=+1,\gamma=+1$$

ove, circa i caratteri α, β, γ si deve ripetere la solita osservazione. La classe KR_1 è quindi una classe duplicata, e si potrà scrivere:

$$KR_1=H^2=HH_0H_0^{-1}H\,;$$

ma, per il lemma del numero precedente, HH_0 è una classe R_2, razionale, $H_0^{-1}H$ è una classe P_1, del tipo P e perciò si ha:

$$KR_1=R_2P_1$$

onde $K=R_2R_1^{-1}P_1$. Ora, essendo $R_2R_1^{-1}$ una classe razionale, si ha che K risulta dalla composizione di una classe razionale con una classe del tipo P: non potrà dunque essere che razionale, complessa del tipo P, oppure composta di due tali tipi, secondochè sia, rispettivamente: P_1 razionale, $R_2R_1^{-1}$ del tipo P e P_1 complessa, oppure $R_2R_1^{-1}$ non del tipo P e P_1 complessa.

Sia $D\equiv 1$ (mod. 4), allora è $-D\equiv 3$ (mod. 4). Tra le forme di Gauss a determinante $-D$, primitive di prima specie, esisterà una forma $f'\equiv(a,b,c)$ per la quale si abbiano le relazioni (3), perchè tra i caratteri delle forme di Gauss, a determinante $-D\equiv 3$ (mod. 4) vi è uno in

(¹) Cfr. La teoria dei generi delle forme di Gauss; ad es. in Bachmann: *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, pag. 108 e seg.

più oltre i caratteri $\left(\frac{f'}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f'}{q_j}\right)$ per cui è ancora possibile soddisfare alla relazione tra i caratteri. Ora, la forma $f \equiv (a\,, ib\,, -c)$, a determinante D, apparterrà, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ad una classe di forme di Dirichlet P_1, del tipo P e sarà tale, che, la classe KP_1 appartenga al genere principale. Segue dunque la stessa conclusione dei casi precedenti.

Le considerazioni svolte in questo numero, e quelle del numero 2, ci conducono al risultato seguente, oggetto dell'attuale studio:

Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet, del corpo $K(\sqrt{-1})$, *a determinante* D (*intero razionale*), *primitive di prima specie, appartenenti ai generi della specie principale* (2), *sono di tre sole categorie: le classi razionali, le classi complesse del tipo* P *e le classi* (*complesse*) *che si ottengono componendo una classe razionale, non del tipo* P, *con una classe complessa del tipo* P.

A questo risultato aggiungiamo ancora l'osservazione: *le classi appartenenti ai generi delle specie principale formano un sotto-gruppo del gruppo di composizione delle classi di forme di Dirichlet, che contiene a sua volta, come sotto-gruppo, quello delle classi appartenenti al genere principale.*

Si noti che se il determinante D contiene fattori primi, razionali, dispari, che siano soltanto $\equiv 3 \pmod{4}$, questi due sotto-gruppi coincidono, ed inversamente.

Matematica. — *Sulle varietà in rappresentazione conforme con la varietà euclidea a più di tre dimensioni.* Nota di Aldo Finzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Di recente ho trattato il problema della rappresentabilità conforme di una varietà qualunque ad n dimensioni sulla euclidea con altrettante dimensioni [1], e sono pervenuto a due serie di condizioni: la prima costituita di equazioni algebriche lineari nei simboli di Riemann, la seconda di equazioni differenziali di 1° ordine nei simboli stessi. Tali gruppi di equazioni, che qui riporto, senz'altro, dalla mia Nota, sono i seguenti:

$$\text{(A)}\qquad a_{ij,hk} + \frac{1}{n-2}\left(a_{ih}\,G_{jk} - a_{ik}\,G_{jh} + a_{jk}\,G_{ih} - a_{jh}\,G_{ik}\right) + \\ + \frac{G}{(n-1)(n-2)}\left(a_{ik}\,a_{jh} - a_{ih}\,a_{jk}\right) = 0\,,$$

$$\text{(B}\qquad a_{ik}\,G_l - a_{il}\,G_k - 2(n-1)\left(G_{ik/l} - G_{il/k}\right) = 0\,.$$

[1] A. Finzi, *Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad n dimensioni l'una sull'altra.* Atti del R. Ist. Veneto, tomo LXXX, parte 2ª, 1921.