ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1922.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Riducibilità delle quadriche differenziali e ds^2 della Statica einsteiniana.* Nota del Socio G. RICCI.

Dirò una quadrica differenziale ad n variabili *algebricamente riducibile* se mediante un cambiamento di variabili essa può ridursi a contenere i differenziali di $n-1$ variabili soltanto; *assolutamente riducibile* se ciò può farsi in modo che i coefficienti della forma ridotta si esprimano esclusivamente per le stesse $n-1$ variabili.

Si vedrà che, come per la riducibilità di una quadrica algebrica, così per la riducibilità algebrica di una quadrica differenziale è condizione necessaria e sufficiente l'annullarsi del suo discriminante; mentre per la riducibilità assoluta è da aggiungere un'altra condizione la quale consiste in ciò che un certo sistema di equazioni algebriche lineari ed omogenee ammetta soluzioni proprie.

Si dica una quadrica differenziale ad n variabili *p volte riducibile* algebricamente (o dotata di riducibilità algebrica di ordine p) se con una opportuna scelta delle variabili indipendenti essa può ridursi a contenere soltanto i differenziali di $n-p$ variabili indipendenti.

Come è stato detto, per $p=1$ (riducibilità algebrica semplice o di 1° ordine) le cose vanno come per la riducibilità semplice delle quadriche algebriche. Per $p>1$ il fatto che la caratteristica del discriminante di una quadrica differenziale ad n variabili sia minore di $n-p$, importa soltanto che si possa addivenire alla sua riduzione algebrica semplice in più modi essenzialmente distinti; mentre per una riducibilità algebrica di ordine superiore si esigono di più altre condizioni espresse da relazioni differenziali tra i coefficienti della quadrica data.

Una interessante applicazione di questi risultati consiste nel determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una quadrica differenziale positiva φ ad n variabili sia equivalente alla somma di una quadrica, nella quale appaiono soltanto i differenziali di $n-1$ variabili e di un termine quadratico nel differenziale di una n^{ma} variabile y. Si riconosce che, come fu dimostrato da Hadamard [1] per le V_3, esse coincidono con quelle, che io dimostrai essere necessarie e sufficienti perchè la varietà V_n definita metricamente da φ contenga una semplice infinità (di equazione $y =$ costante) di varietà V_{n-1} totalmente geodetiche.

E poichè altrove [2] ho dimostrato che, verificandosi questo caso, le traiettorie ortogonali delle V_{n-1} costituiscono una congruenza principale per la V_n, se la ennupla principale di questa è unica e determinata, si può immediatamente riconoscere se il suo ds^2 sia riducibile alla espressione canonica voluta ed in che modo.

Si vedrà ancora che l'essere nullo il rotore della curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle V_{n-1} è condizione necessaria e sufficiente perchè il parametro y delle stesse V_{n-1} possa scegliersi in modo che il coefficiente di dy^2 nella espressione canonica suddetta sia indipendente da y. Salvo gli adattamenti resi necessarî dalla natura non definita delle quadriche, che rappresentano il ds^2 delle varietà quadrimensionali (spazio-tempo) di Einstein nel senso statico, tali varietà risultano così intrinsecamente caratterizzate.

1. Perchè una quadrica differenziale

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

sia algebricamente riducibile p volte, si richiede e basta che, posto $m = n - p$, le variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ si possano esprimere per n variabili indipendenti $y_1, y_2, \dots, y_m; y_{m+1} \dots y_n$ in modo che, posto

$$b_{pq} = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q},$$

risulti

$$b_{pq} = 0 \qquad (p = 1, 2 \dots n;\ q = m+1 \dots n). \tag{1}$$

[1] *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions.* Tome XXV de la 2.e série du Bulletin des Sciences mathématiques.

[2] Cfr. Ricci, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque.* Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Tomo LXIII, Parte 2a (Anno 1903-1904), pag. 1233.

E ciò esige che

$$X_s = \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \qquad (q = m+1, m+2, \dots n) \tag{2}$$

siano soluzioni proprie indipendenti del sistema di equazioni algebriche

$$\sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots n); \tag{3}$$

per il che si richiede poi anzitutto che, detta k la caratteristica del discriminante della forma φ, sia $k \leq m$.

In una Nota, che è in corso di pubblicazione negli Atti del R. Istituto Veneto, ho dimostrato che è inoltre per ciò necessario e sufficiente che il sistema (3) ammetta $n - m$ soluzioni indipendenti

$$X_s = A_{q;s}$$

tali che il sistema di equazioni lineari a derivate parziali di 1° ordine

$$\sum_1^n {}_s\, A_{q,s} \frac{\partial y}{\partial x_s} = 0 \qquad (q = m+1, m+2, \dots n)$$

risulti completo: e che, soddisfatte tali condizioni, si soddisfa alle (1) assumendo come variabili $y_1, y_2, \dots, y_m$ m integrali indipendenti di questo sistema.

In particolare la condizione $k < n$, oltre che necessaria, è anche sufficiente per la riducibilità semplice algebrica della forma φ; e se

$$X_s = A_s$$

è una qualunque soluzione propria del sistema (3), per dare a φ una espressione della forma

$$\psi = \sum_1^{n-1} {}_{pq}\, b_{pq}\, dy_p\, dy_q$$

basterà ad $x_1, x_2, \dots, x_n$ sostituire n variabili indipendenti $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}; y_n$ tali che le prime $n-1$ di esse soddisfacciano alla equazione

$$\sum_1^n {}_s\, A_s \frac{\partial y}{\partial x_s} = 0.$$

Evidentemente se è $k < n - 1$, una tale riduzione di φ si può ottenere in più modi; possiamo dire in $n - k$ modi essenzialmente distinti; ed è possibile una ulteriore riduzione di ψ nel modo sopra indicato per φ. La nuova ridotta, che conterrà soltanto i differenziali di $n - 2$ variabili indipendenti, potrà però considerarsi come una ridotta di φ se i coefficienti di ψ saranno indipendenti da y_n ed in questo caso soltanto.

Concludiamo che perchè una quadrica differenziale sia riducibile algebricamente due volte, è necessario e basta che sia $k \leq n - 2$ e di più che essa sia riducibile assolutamente una volta sola.

2. Suppongasi ora la forma φ riducibile assolutamente una volta, e sia ψ la sua ridotta. Avremo per i coefficienti di ψ le espressioni

$$b_{pq} = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q}, \quad (p, q = 1, 2, \dots, n-1)$$

e la ipotesi che essi siano indipendenti da y_n sarà analiticamente espressa dalle relazioni

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_{rst} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \frac{\partial x_t}{\partial y_n} + \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \left(\frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_q \partial y_n} + \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_p \partial y_n} \right) = 0$$

dimostrate così per p e q minori di n.

Esse valgono però anche per p e q qualunque, poichè nei casi fino ad ora esclusi esse derivano dalle relazioni

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 \qquad (p = 1, 2, \dots, n),$$

conseguenze queste, alla loro volta, delle

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_{s}\, a_{rs} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0.$$

E poichè da queste ultime scendono pure le

$$\sum_1^n {}_{s}\, a_{rs} \frac{\partial^2 x_s}{\partial y_q \partial y_n} = - \sum_1^n {}_{st} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial y_q} \frac{\partial x_s}{\partial y_n},$$

alle (4) possiamo sostituire le

$$\sum_1^n {}_{rst}\, a_{rs,t} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \frac{\partial x_t}{\partial y_n} = 0,$$

alle quali equivalgono poi le

$$(6) \qquad \sum_1^n {}_{t}\, a_{rs,t} \frac{\partial x_t}{\partial y_n} = 0 \ [1].$$

Perchè la quadrica φ sia assolutamente riducibile, è dunque necessario che il sistema di equazioni algebriche costituito dalle (2) e dalle

$$(3') \qquad \sum_1^n {}_{t}\, a_{rs,t} \mathrm{X}_t = 0$$

ammetta soluzioni proprie. E questa condizione è poi anche sufficiente poichè, come risulta dalla Nota ricordata sopra, se

$$\mathrm{X}_s = \mathrm{A}_s$$

[1] Ricordo che con $a_{rs,t}$ designo simboli di Christoffel di 1ª specie relativi alla forma φ.

è una tale soluzione ed $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ sono funzioni indipendenti di $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti tutte, eccettuata l'ultima, alla equazione

$$\sum_1^n {}_s \mathrm{A}_s \frac{\partial y}{\partial x_s} = 0 ,$$

sono insieme soddisfatte le (5) e le (6).

3. Data ora una quadrica differenziale positiva

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs} g_{rs}\, dx_r\, dx_s ,$$

proponiamoci di riconoscere se e come essa sia esprimibile sotto la forma

$$\psi = \psi_0 + \mathrm{H}^2\, dy^2 ,$$

essendo ψ_0 una quadrica differenziale ad $n-1$ variabili.

Se si osserva che la quadrica $\psi - \mathrm{H}^2\, dy^2$ deve essere riducibile, è facile prima di tutto riconoscere che nella varietà definita metricamente da ψ deve esistere una congruenza di sistema coordinato covariante

$$\lambda_r = \mathrm{H} \frac{\partial y}{\partial x_r} \tag{7}$$

e conseguentemente normale perchè costituita dalle traiettorie ortogonali alle sottovarietà di equazione $y =$ costante.

Designeremo talora con $\lambda_{n/r}$ il sistema λ_r ed alla congruenza λ o λ_n associeremo altre $n-1$ congruenze λ_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ costituenti con essa una ennupla ortogonale. Risulterà così

$$\psi_0 = \sum_r^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

valendo per i coefficienti di ψ_0 le espressioni

$$a_{rs} = \sum_1^{n-1} {}_i\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{i/s} ; \tag{8}$$

dalle quali risulta che il suo discriminante a è eguale a 0, avendo precisamente $n-1$ come caratteristica, e di più che è

$$\sum_1^n {}_s\, \lambda^{(s)}\, a_{rs} = 0 .$$

La ψ_0 è dunque semplicemente riducibile, e se $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ costituiscono un sistema fondamentale di integrali per la equazione

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda^{(r)} \frac{\partial y}{\partial x_r} = 0 , \tag{9}$$

essa si esprime pei differenziali di $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ soltanto.

In base alle (8), le condizioni di assoluta riducibilità dateci dal paragrafo precedente, che nel nostro caso assumono la forma

$$\sum_1^n {}_t\, \lambda^{(t)} a_{rs,t} = 0 ,$$

si traducono immediatamente nelle

$$\sum_r^{n-1} {}_i\, \lambda_{i/r} \sum_1^n {}_t\, \lambda^{(t)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/t}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_t} \right) + \sum_1^{n-1} {}_i\, \lambda_{i/s} \sum_1^n {}_t\, \lambda^{(t)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/t}}{\partial x_r} - \frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_t} \right) = 0$$

che equivalgono alle

$$\sum_1^n \lambda^{(t)} \sum_1^{n-1} {}_i \left\{ \lambda_{i/r} (\lambda_{i/ts} - \lambda_{i/st}) + \lambda_{i/s} (\lambda_{i/tr} - \lambda_{i/rt}) \right\} .$$

Sostituendo infine alle $\lambda_{i/st}$ le loro espressioni in funzione delle rotazioni γ_{ihk}

$$\lambda_{i/st} = \sum_1^n {}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \lambda_{h/s}\, \lambda_{k/t} ,$$

queste assumono la forma

$$\sum_1^{n-1} {}_{ih} (\gamma_{nih} + \gamma_{nhi})\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{h/s} = 0$$

ed equivalgono alle

$$\gamma_{nih} + \gamma_{nhi} = 0 \qquad (i\,, h = 1\,, 2\,, \ldots, n-1).$$

E se si tien conto (¹) che, per la normalità della congruenza λ, valgono le relazioni

$$\gamma_{nih} - \gamma_{nhi} = 0 ,$$

si conclude che le relazioni cercate sono rappresentate dalle

(10) $$\gamma_{nih} = 0 \qquad (i\,, h = 1\,, 2\,, \ldots, n-1)$$

le quali devono essere soddisfatte comunque si scelgano le $n-1$ congruenze λ_i, che associate alla λ nella varietà V_n metricamente definita dalla forma φ, devono costituire una ennupla ortogonale.

E poichè le (10) (²) rappresentano anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè nella varietà V_n, la cui metrica è determinata dalla forma ψ, le sottovarietà di parametro y siano totalmente geodetiche, concludiamo che la detta forma ψ è suscettibile della espressione canonica sopra assegnata, soltanto se la V_n contiene una famiglia semplicemente infinita di V_{n-1} totalmente geodetiche.

4. Proponiamoci ancora di riconoscere sotto quali condizioni il coefficiente H^2, che appare nella detta espressione di ψ, per una opportuna scelta del parametro y, possa riescire indipendente da y; che è quanto dire sod-

(¹) Cfr. Ricci. *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*. R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze fisiche ecc., vol. II, § I, 9.

(²) Cfr. Ricci, *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque* ecc. Questi Rendiconti, vol. XII, pag. 409.

disfare alla equazione a derivate parziali (9). Perciò deriviamo covariantemente le (7), avendo presente che, come segue dalle (7) stesse, è

$$H^2 = 1 : (\Delta_1 y)^2$$

e che per la integrabilità loro si richiede che il sistema derivato da quello di elementi $\frac{\partial y}{\partial x_r}$ sia simmetrico. Eliminando tra le equazioni così ottenute le derivate seconde di y si ottengono lo equazioni

$$\lambda_{rs} - \frac{\partial y}{\partial x_r}\frac{\partial H}{\partial x_s} = \lambda_{sr} - \frac{\partial y}{\partial x_s}\frac{\partial H}{\partial x_r},$$

alle quali, dovendo H soddisfare alle equazioni (9), equivalgono le

$$\sum_{1}^{n}{}_s \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = -\frac{\partial \log H}{\partial x_r};$$

od anche, essendo

$$\lambda_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} \gamma_{nhk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s},$$

le

$$\sum_{1}^{n-1}{}_h \gamma_{nhn} \lambda_{h/r} = -\frac{\partial \log H}{\partial x_r}.$$

E poichè [1] il sistema covariante semplice, che fornisce i primi membri di queste equazioni, definisce quel vettore normale alla congruenza λ, che chiamai curvatura geodetica della congruenza stessa, queste equazioni ci dicono che condizione necessaria e sufficiente perchè H sia indipendente da y, è che il rotore del vettore anzidetto sia nullo.

Astronomia. — Il Socio V. CERULLI parla della bella scoperta delle nubi cosmiche, fatta mediante il 16 pollici della specola Vaticana, dall'illustre P. Hagen, e ne segnala l'importanza, dimostrandola destinata a portar nuovi lumi in tutte quelle questioni che si riferiscono alla cosmogonia ed alla distribuzione stellare. Le nubi cosmiche coprono per $^3/_4$ il cielo, e non lasciano interamente scoperto altro che la Via lattea. Perciò il loro intreccio complicatissimo, appunto per l'analogia con la Via lattea, ha ricevuto da Hagen il nome di Via Nubila. Hagen ha pubblicato testè una carta che mostra il percorso della Via Nubila entro le costellazioni di Pérseo e dell'Auriga, segnandovi i numeri delle stelle per ogni grado quadrato. Appare evidente da detta carta che densità stellare e densità della Via Nubila variano in ragione inversa l'una dell'altra: segno non dubbio che la Via Nubila è quella che fornisce la materia onde si originano le stelle.

[1] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*. R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di scienze fisiche ecc., vol. II, § I, 6.