ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.
1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa.* Nota di N. ABRAMESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. Le serie di polinomi, $\sum a_n \mathrm{P}_n(x)$, appaiono come una generalizzazione della serie di Taylor, $\sum a_n x^n$. Lo studio delle serie di polinomi si può fare da due punti di vista. Primo, si dà una funzione $f(x)$, regolare in un campo limitato da una curva chiusa (C), con connessione semplice, e si richiede uno sviluppo in serie di polinomi della funzione $f(x)$, valevole solamente nell'interno della curva (C). Questo problema è stato completamente risolto [1], dimostrando che lo sviluppo è valevole solamente nell'interno della curva (C), i polinomi $\mathrm{P}_n(x)$ dipendono esclusivamente dal contorno (C), mentre i coefficienti a_n dello sviluppo dipendono e dal contorno (C) e dalla funzione $f(x)$.

Un altro punto di vista dello studio delle serie di polinomi è anche il seguente. Data una successione di polinomi, $\mathrm{P}_0(x), \mathrm{P}_1(x), \dots, \mathrm{P}_n(x), \dots$, di gradi uguali agli indici, come pure i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, si chiede la regione di convergenza della serie $\sum a_n \mathrm{P}_n(x)$. Questo problema ha cominciato ad essere studiato 45 anni or sono da Darboux [2] e da Poincaré [3].

Nel presente lavoro studio il *problema posto per la prima volta da Darboux* [4], nella Memoria citata, cioè considero le serie di polinomi $\sum a_n \mathrm{P}_n(x)$, i polinomi $\mathrm{P}_n(x)$ essendo definiti dalle relazioni di ortogonalità

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{P}_m(x)\,\mathrm{P}_n(x)\,dx = 0\,,\quad m \neq n\,;\quad \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{P}_n^2(x)\,dx = \mathrm{I}_n = \text{cost.}^{\mathrm{i}}\ \text{assegnate},$$

dove $\varphi(x)$ designa una funzione positiva ed integrabile nell'intervallo (a, b) [5].

(1) Faber, *Ueber polynomische Entwickelungen* (Math. Annalen, 1903, pag. 389; 1907, pag. 118); N. Abramescu, *Sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, Romania, 1921).

(2) *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (Journ. de Mathém. pures et appliquées. 1878)

(3) *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal of Matematics, vol. VII); Pincherle, *Sui sistemi di funzioni analitiche....* (Annali di Matematica, II, vol. XII).

(4) Per questo le chiamo *Serie di Darboux* e non serie di polinomi ortogonali come le chiamano i tedeschi.

(5) Queste serie sono state considerate anche dal sig. Picard nel suo corso di Analisi superiore alla Sorbonne (Paris) nel 1918.

II. 1°. Cominciando con lo studio dei polinomi $P_n(x)$, dimostro che il polinomio $P_n(x)$ si può mettere sotto la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & xg_1 - g_2 & \dots & xg_{n-1} - g_n \\ xg_1 - g_2 & xg_2 - g_3 & \dots & xg_n - g_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ xg_{n-1} - g_n & xg_n - g_{n+1} & \dots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)},$$

$$D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n} \end{vmatrix}.$$

$$F = (x - t)\,\varphi(t) \quad . \quad g_s = \int_a^b \varphi(t)\, t^s\, dt,$$

che $D_{n-1}(F)$ e $D_{n-1}(\varphi)$ sono i determinanti delle forme quadratiche

$$\int_a^b (x - t)\,\varphi(t)\,(y_0 + y_1 t + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2\, dt = \sum\sum (xg_{p+q} - g_{p+q+1})\, y_p y_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)\,(y_0 + \dots + y_{n-1} t^{n-1})^2\, dt = \sum\sum g_{p+q}\, y_p y_q, \quad p, q = 0, 1, \dots n - 1.$$

2°. Analogamente il polinomio $P_n(x)$ si può mettere anche sotto la seguente forma

$$P_n(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n\,(b - a)^n} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x - a)^n (x - b)^n \psi_n(x) \right],$$

$\psi_n(x)$ essendo una funzione finita per $x = a$ ed $x = b$.

III. In ciò che segue, *studio quelle serie di polinomi* $P_n(x)$ *ai quali corrisponde la stessa funzione* $\psi_n(x)$ *indipendente da* n, *che indico con* $\psi(x)$. In questo caso la funzione $\varphi(x)$ è la soluzione comune di un numero infinito di equazioni integrali

$$\psi(x) = \frac{(b - a)^n\, n}{(x - a)^n (x - b)^n} \int_a^x (x - z)^{n-1}\, \varphi(z)\, P_n(z)\, dz.$$

Studio anche il caso $\psi_n(x) = \varphi(x)$, e ritrovo tutti i polinomi conosciuti di Legendre, Jacobi, ecc.

Oltre alle proprietà conosciute dei polinomi $P_n(x)$, trovo ancora le seguenti.

1°. Il polinomio $P_n(x)$ è il coefficiente di t^n nello sviluppo in serie di t dell'espressione $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{\partial z}{\partial x}$, z essendo la radice dell'equazione

$$z = x + t\,\frac{(z - a)(z - b)}{b - a}, \quad z = x, \quad t = 0,$$

che si svolge con la formola di Lagrange; questa espressione è una funzione generatrice per i polinomi $P_n(x)$.

2°. Se $\varphi(x) = \psi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, il polinomio $P_n(x)$ verifica una equazione differenziale di 2° ordine, lineare, la seconda soluzione della quale è

$$\frac{1}{n!\,(b-a)^n} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} \int_a^b (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{-n-1}\, dt\,.$$

3°. Indicando con $c_{n,n}$, $c_{n,n-1}$ i coefficienti di x^n ed x^{n-1} del polinomio $P_n(x)$, si può precisare la relazione di ricorrenza fra tre polinomi consecutivi che, nel nostro caso, è

$$\frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) - (x-\alpha_n)\, P_n(x) + \frac{c_{n-1,n-1}\, I_n}{c_{n,n}\, I_{n-1}} P_{n-1}(x) = 0\,,$$

$$I_n = (-1)^n \frac{c_{n,n}}{(b-a)^n} \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \psi(x)\, dx\,,\quad \alpha_n = \frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}} - \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}}\,.$$

4°. Ricerco quindi il dominio di convergenza della serie di Lagrange, in generale, e poi nel caso del nostro sviluppo. Servendomi del metodo di Darboux per la determinazione del valore approssimato del termine generale della serie di Lagrange, dimostro che il valore approssimato del polinomio $P_n(x)$ (dopo aver fatto un cambiamento di variabile in modo che ai limiti a e b corrispondano 0 ed 1) è

$$P_n(x) = \Psi(\xi)\, n^{-\frac{1}{2}}\, \xi^{n+1} (1+\varepsilon)\,,\quad \xi = 1 - 2x + \sqrt{4x^2 - 4x}\,,$$

$\Psi(\xi)$ essendo una funzione indipendente da n e da ε. Trovo in pari tempo i valori assintotici dei coefficienti $c_{n,n}$, $c_{n,n-1}$.

IV. 1°. Le curve di convergenza delle serie considerate sono ellissi omofocali, con i fuochi in a e b che ottengo valendomi del valore prossimo del polinomio $P_n(x)$.

2°. Le stesse curve di convergenza le trovo anche osservando che $P_n(x)$ è il coefficiente del termine generale della serie di Lagrange studiata.

V. 1°. Passo poi allo sviluppo in serie di polinomi $P_n(x)$ di una funzione $f(x)$ regolare in una determinata regione. Considero il caso particolare dello sviluppo

$$\frac{1}{x-y} = \sum \frac{P_n(x)\, Q_n(y)}{I_n}\,,\quad Q_n(y) = \int_a^b \frac{\varphi(t)\, P_n(t)}{t-y}\, dt\,,$$

e faccio lo studio delle funzioni di seconda specie, $Q_n(y)$, di Darboux.

2°. Determino la relazione di ricorrenza che è verificata dalle funzioni $Q_n(y)$.

3°. Dimostro che (prendendo come limiti 0 ed 1 invece di a e b),

$$Q_n(y) = \int_0^1 \psi(t) \frac{t^n(1-t)^n}{(t-y)^{n+1}} dt .$$

4°. Nel caso $\varphi(x) = \psi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, la seconda soluzione dell'equazione differenziale che è verificata da $P_n(x)$, è

$$\frac{1}{n!} (1-x)^{-\mu} x^{-\lambda} Q_n(x) .$$

5°. Valendomi del metodo di Darboux per il calcolo dei valori approssimati dell'integrale di Laplace, dimostro che i valori assintotici di $Q_n(y)$ ed I_n sono

$$Q_n(y) = \int_a^b \psi(t) \frac{t^n (1-t)^n}{(t-y)^{n+1}} dt = \Phi(\eta)\, n^{-\frac{1}{2}} \eta^{-n-1} (1+\varepsilon),$$

$$\eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y} ,$$

$$I_n = (-1)^n c_{n,n} \int_0^1 \psi(t)\, t^n (1-t)^n dt = \frac{k}{n} (1+\varepsilon') ,$$

$\Phi(\eta)$ e k essendo indipendente da n.

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane.* Nota II di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Si è visto, nella precedente Nota [1], che affinchè lo spazio-tempo

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu r^2 d\varphi^2 + c^2 e^\nu dt^2 , \tag{1}$$

in cui λ, μ, ν sono funzioni di r soddisfacenti alla condizione

$$\lim_{r \to \infty} \lambda = \lim \mu = \lim \nu = 0 , \tag{2}$$

ammetta geodetiche che siano rappresentate, quando si elimini il tempo, da traiettorie di equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \text{cost} = a , \quad u = \frac{1}{r} , \tag{3}$$

occorre e basta che sia

$$e^\nu = \frac{1+\beta u}{1+\alpha u} , \quad e^\mu = e^\lambda = 1 + \beta u \tag{4}$$

[1] Questi Rendiconti, 1922, vol XXXI, 1° sem., pag. 18.