ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

più oltre i caratteri $\left(\frac{f'}{p_i}\right)$ e $\left(\frac{f'}{q_j}\right)$ per cui è ancora possibile soddisfare alla relazione tra i caratteri. Ora, la forma $f \equiv (a, ib, -c)$, a determinante D, apparterrà, nel corpo $K(\sqrt{-1})$, ad una classe di forme di Dirichlet P_1, del tipo P e sarà tale, che, la classe KP_1 appartenga al genere principale. Segue dunque la stessa conclusione dei casi precedenti.

Le considerazioni svolte in questo numero, e quelle del numero 2, ci conducono al risultato seguente, oggetto dell'attuale studio:

Le classi di forme aritmetiche di Dirichlet, del corpo $K(\sqrt{-1})$, *a determinante* D (*intero razionale*), *primitive di prima specie, appartenenti ai generi della specie principale* (2), *sono di tre sole categorie*: *le classi razionali, le classi complesse del tipo* P *e le classi* (*complesse*) *che si ottengono componendo una classe razionale, non del tipo* P, *con una classe complessa del tipo* P.

A questo risultato aggiungiamo ancora l'osservazione: *le classi appartenenti ai generi delle specie principale formano un sotto-gruppo del gruppo di composizione delle classi di forme di Dirichlet, che contiene a sua volta, come sotto-gruppo, quello delle classi appartenenti al genere principale.*

Si noti che se il determinante D contiene fattori primi, razionali, dispari, che siano soltanto $\equiv 3 \pmod{4}$, questi due sotto-gruppi coincidono, ed inversamente.

Matematica. — *Sulle varietà in rappresentazione conforme con la varietà euclidea a più di tre dimensioni.* Nota di ALDO FINZI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Di recente ho trattato il problema della rappresentabilità conforme di una varietà qualunque ad n dimensioni sulla euclidea con altrettante dimensioni ([1]), e sono pervenuto a due serie di condizioni: la prima costituita di equazioni algebriche lineari nei simboli di Riemann, la seconda di equazioni differenziali di 1° ordine nei simboli stessi. Tali gruppi di equazioni, che qui riporto, senz'altro, dalla mia Nota, sono i seguenti:

$$(A)\qquad a_{ij,hk} + \frac{1}{n-2}\left(a_{ih}\,G_{jk} - a_{ik}\,G_{jh} + a_{jk}\,G_{ih} - a_{jh}\,G_{ik}\right) + \frac{G}{(n-1)(n-2)}\left(a_{ik}\,a_{jh} - a_{ih}\,a_{jk}\right) = 0\,,$$

$$(B)\qquad a_{ik}\,G_l - a_{il}\,G_k - 2(n-1)\left(G_{ik/l} - G_{il/k}\right) = 0\,.$$

([1]) A. Finzi, *Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad n dimensioni l'una sull'altra.* Atti del R. Ist. Veneto, tomo LXXX, parte 2ª, 1921.

in cui è

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh} a^{(jh)} a_{ij,hk} \quad , \quad G = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a^{(ik)} G_{ik} .$$

Per $n = 3$ le (A) si riducono ad identità.

Contemporaneamente a me, e con metodi proprî, lo Schouten ha trattato lo stesso problema [1], ed è giunto, naturalmente, a due sistemi di equazioni equivalenti ad (A) e (B), espressi con gli speciali simboli di cui l'autore da alcun tempo si vale. Lo Schouten ha fatto, però, un'ulteriore e feconda osservazione, che a me era sfuggita. Si tratta precisamente di questo. Nella mia Nota io ho asserito (omettendone la facilissima dimostrazione) che le relazioni del Bianchi per i simboli di Riemann sono identicamente soddisfatte, quando sono verificate le (A) e le (B). Lo Schouten, invece, ha dimostrato che, per $n > 3$, dalle relazioni del Bianchi e dal gruppo delle condizioni algebriche si può ottenere il gruppo delle condizioni differenziali, le quali diventano quindi superflue per la rappresentabilità conforme di una V_n $(n > 3)$ sopra lo spazio piano. Tale risultato può trarsi molto rapidamente anche dalle mie equazioni (A), associandovi le identità del Bianchi e l alcune loro combinazioni già costruite dal Levi Civita [2].

Ciò mi propongo di mostrare in questa Nota [3], in cui aggiungo alcuna delle applicazioni consentite allo Schouten dalla osservazione sopra esposta, ritenendone non inutile la trattazione con i metodi del Calcolo differenziale assoluto, dato che lo speciale simbolismo usato da quell'autore richiede una iniziazione tutta propria.

2. Con le posizioni

$$\mathit{A}_{rs} = a_{rs} G - 2(n-1) G_{rs} , \tag{1}$$

$$A_{rst} = \mathit{A}_{rst} - \mathit{A}_{rts} , \tag{2}$$

già da me introdotte nel citato lavoro, le (A) e (B) prendono la forma

$$2(n-1)(n-2) a_{ij,hk} + (a_{ik} \mathit{A}_{jh} - a_{ih} \mathit{A}_{jk} + a_{jh} \mathit{A}_{ik} - a_{jk} \mathit{A}_{ih}) = 0 , \tag{A$_1$}$$

$$A_{rst} = 0 . \tag{B$_1$}$$

Derivando le (A_1) e tenendo conto delle relazioni del Bianchi

$$a_{ij,hkl} + a_{ij,klh} + a_{ij,lhk} = 0 ,$$

[1] J. A Schouten, *Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung*. Mathem. Zeitschrift, Band 11, Heft 1/2, 1921, pp. 58-88.

[2] T. Levi-Civita, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale*. Rend. R Acc. Lincei, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem. 1917, pag. 381, formole (12).

[3] Il risultato dello Schouten fu ottenuto poi, per altra via, anche dal Weyl in *Einordnung der projekt. und der Konf. Auffassung*. Nach. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 1921, s. 9.

dalle (A_1) si passa alle

$$a_{ih} A_{jkl} + a_{ik} A_{jlh} + a_{il} A_{jhk} = a_{jh} A_{ikl} + a_{jk} A_{ilh} + a_{jl} A_{ihk},$$

e da queste, moltiplicando per $a^{(ih)}$ e sommando rispetto ad i, h, si deducono le

$$(n-3) A_{jkl} = a_{jk} \sum_1^n {}_{ih} a^{(ih)} A_{ilh} + a_{jl} \sum_1^n {}_{ih} a^{(ih)} A_{ihk}.$$

Se si tiene conto delle posizioni (1) e (2), e delle identità del Levi-Civita

$$2 \sum_1^n {}_{ih} a^{(ih)} G_{lih} = G_l,$$

dianzi citate, si riconosce facilmente che le due sommatorie del 2° membro delle equazioni precedenti sono identicamente nulle; per cui da esse si trae

$$(n-3) A_{jkl} = 0,$$

e per $n > 3$ si hanno, quindi, le (B_1).

3. Quando $n > 3$, le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una varietà V_n sia rappresentabile conformemente sulla varietà euclidea, sono dunque date dalle sole equazioni (A), che nel precedente lavoro ho messo sotto la seguente forma intrinseca:

$$(A') \qquad \gamma_{pq,rt} = 0,$$

$$(A'') \qquad \gamma_{pq,pt} = \sum_1^n {}_r \gamma_{rq,rt},$$

$$(A''') \qquad \gamma_{pq,pq} = \frac{1}{n-2} \sum_1^n {}_r (\gamma_{rp,rp} + \gamma_{rq,rq}) - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_1^n {}_{rs} \gamma_{rs,rs}.$$

(indici tutti distinti), con riferimento ad una qualunque ennupla di congruenze ortogonali della varietà data.

Se, in particolare, ci si riferisce ad una ennupla principale [1], dovendo per essa aversi

$$\sum_1^n {}_r \gamma_{rq,rt} = 0 \quad (q \neq t) \quad , \quad \sum_1^n {}_r \gamma_{rp,rp} = \varrho_p,$$

in cui ϱ_p sono gli invarianti principali, le precedenti assumono l'aspetto più semplice

$$\gamma_{pq,rt} = 0 \;,\; \gamma_{pq,pt} = 0 \;,\; (n-1)(n-2)\,\gamma_{pq,pq} = (n-1)(\varrho_p + \varrho_q) - \sum_1^n {}_r \varrho_r.$$

(1) G. Ricci, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, parte 2ª, 1903-04, pp. 1233-1239, cfr. pag. 1236.

4. Si voglia ora trovare per quali varietà V_n $(n > 3)$, immerse nello spazio piano ad $n+1$ dimensioni (ipersuperficie), le condizioni (A'), (A''), (A''') siano verificate.

Basterà ricordare che ogni ennupla che risulti delle linee di curvatura di una ipersuperficie ad n dimensioni, è per essa una ennupla principale, e che fra le ennuple principali ne esiste una almeno per cui sono soddisfatte le equazioni

$$\gamma_{pq,rl} = 0 \,, \tag{3}$$

ogni volta che la combinazione semplice (rl) degli indici $1, 2, \ldots, n$, è distinta dalla (pq), e alle equazioni

$$\gamma_{pq,pq} = \beta_p \beta_q \,, \tag{4}$$

in cui $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono indeterminate [1].

Le (A') ed (A'') sono senz'altro soddisfatte, se lo sono le (3); le (A'''), in virtù delle (4), diventano

$$(n-1)(n-2)\beta_p \beta_q - (n-1)\left\{\beta_p(\mathrm{B}-\beta_p) + \beta_q(\mathrm{B}-\beta_q)\right\} = \sum_1^n {}_r \beta_r^2 - \mathrm{B}^2 \tag{5}$$

ove $\mathrm{B} = \sum_1^n {}_r \beta_r^2$. Le (5) si mutano in identità, non solo se si suppongono tutte uguali le β_r, ma anche se si suppongono uguali $n-1$ di esse.

Ponendo nelle (5), in luogo della combinazione (p, q), successivamente, le combinazioni (i, j), (i, k) e sottraendo, indi (j, l) e (k, l) e sottraendo, si ricavano le equazioni

$$(\beta_j - \beta_k)\left\{(n-2)\beta_i + \beta_j + \beta_k - \mathrm{B}\right\} = 0 \,,$$

$$(\beta_j - \beta_k)\left\{(n-2)\beta_l + \beta_j + \beta_k - \mathrm{B}\right\} = 0 \,,$$

da cui si passa alle

$$(\beta_i - \beta_k)(\beta_i - \beta_l) = 0.$$

Queste, e l'osservazione fatta sopra, esprimono il teorema: *Fra le ipersuperficie ad n dimensioni $(n > 3)$ sono rappresentabili conformemente sulla varietà euclidea ad n dimensioni tutte e soltanto quelle per le quali $n-1$ almeno delle β_i sono uguali* [2].

5. Dal Ricci fu dimostrata questa notevole proposizione [3]: *Ammettono terne ortogonali costituite di congruenze normali e isotrope tutte e sole*

[1] G. Ricci, loc. cit., pag. 1238.

[2] J. A. Schouten, loc. cit., pp. 87-88. Il caso $n = 3$ fu trattato da me nella Nota: *Le ipersup. a tre dimensioni che si possono rappresentare conform. sullo spazio euclideo.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXII, parte 2ª, 1903.

[3] G. Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Rend. R. Accad. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910, pp. 181-187.

le varietà a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo.

Il teorema si estende facilmente alle varietà con un numero qualunque di dimensioni maggiore di tre (1). Se si suppone infatti che la V_n ammetta una ennupla ortogonale (che potrà assumersi come ennupla di riferimento) costituita di congruenze normali ed isotrope, per essa saranno soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\gamma_{hij} = 0 \quad , \quad \gamma_{hii} = \gamma_{hjj} ,$$

per ogni terna di indici h, i, j distinti.

In tale ipotesi, per gli invarianti γ a 4 indici, varranno le relazioni

$$\gamma_{hi,kj} = 0 \quad , \quad \gamma_{hi,hj} = \gamma_{ki,kj} ,$$
$$\gamma_{hi.hi} + \gamma_{kj,kj} = \gamma_{hk,hk} + \gamma_{ij,ij} ,$$

in cui h, i, k, j sono da intendere variabili da 1 ad n, ma tutti distinti. Le relazioni del 1° gruppo coincidono con le (A'); da quelle del 2° (dando a k tutti i valori da 1 ad n, diversi da i e j, e sommando) si ottengono le (A''); e infine da quelle del 3° gruppo (dando a j tutti i valori da 1 ad n, diversi da i e k, e sommando, indi a k tutti i valori da 1 ad n, eccetto h, e sommando) si hanno le (A''').

Risulta pertanto che ogni V_n, nella quale esiste una ennupla ortogonale di congruenze normali e isotrope, è in rappresentazione conforme con la varietà euclidea; la proposizione reciproca non ha bisogno di dimostrazione, e però il teorema di Ricci risulta generalizzato, come si voleva.

Matematica. — *Sulla equazione funzionale $f(x+y)=f(x)\,f(y)$.* Nota I di SILVIO MINETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (2).

I. INTRODUZIONE. — È noto (3) che se una $f(x)$, funzione della x nel senso di Dirichlet, soggiace alle seguenti ipotesi:

1) è definita in tutto il campo reale;

2) in un intervallo prefissato, $a \leq x \leq b$, si mantiene reale, ed inferiore in valore assoluto ad un numero positivo M;

3) in tutto il campo reale soddisfa all'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) , \tag{1}$$

ovvero all'altra

$$f(x+y) = f(x) + f(y) . \tag{1'}$$

(1) Di questa generalizzazione lo Schouten fa cenno nella nota 33 a piè di pag. 88 del citato suo lavoro.

(2) Presentata nella seduta del 19 giugno 1921.

(3) Darboux, Math. Annal., Bd XVII, 1880, pag. 55.