ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

3°. Dimostro che (prendendo come limiti 0 ed 1 invece di a e b),

$$Q_n(y) = \int_0^1 \psi(t) \frac{t^n(1-t)^n}{(t-y)^{n+1}} dt .$$

4°. Nel caso $\varphi(x) = \psi(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, la seconda soluzione dell'equazione differenziale che è verificata da $P_n(x)$, è

$$\frac{1}{n!} (1-x)^{-\mu} x^{-\lambda} Q_n(x) .$$

5°. Valendomi del metodo di Darboux per il calcolo dei valori approssimati dell'integrale di Laplace, dimostro che i valori assintotici di $Q_n(y)$ ed I_n sono

$$Q_n(y) = \int_a^b \psi(t) \frac{t^n(1-t)^n}{(t-y)^{n+1}} dt = \Phi(\eta)\, n^{-\frac{1}{2}} \eta^{-n-1} (1+\varepsilon),$$

$$\eta = 1 - 2y + \sqrt{4y^2 - 4y} ,$$

$$I_n = (-1)^n c_{n,n} \int_0^1 \psi(t)\, t^n (1-t)^n dt = \frac{k}{n} (1+\varepsilon') ,$$

$\Phi(\eta)$ e k essendo indipendente da n.

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane.* Nota II di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. Si è visto, nella precedente Nota (¹), che affinchè lo spazio-tempo

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu r^2 d\varphi^2 + c^2 e^\nu dt^2 , \tag{1}$$

in cui λ, μ, ν sono funzioni di r soddisfacenti alla condizione

$$\lim_{r \to \infty} \lambda = \lim \mu = \lim \nu = 0 , \tag{2}$$

ammetta geodetiche che siano rappresentate, quando si elimini il tempo, da traiettorie di equazione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \text{cost} = a , \quad u = \frac{1}{r} , \tag{3}$$

occorre e basta che sia

$$e^\nu = \frac{1+\beta u}{1+\alpha u} , \quad e^\mu = e^\lambda = 1 + \beta u \tag{4}$$

(¹) Questi Rendiconti, 1922, vol XXXI, 1° sem., pag. 18.

essendo α, β due costanti arbitrarie. Si ha in tal caso

$$a = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right) \tag{5}$$

in cui h, k sono due costanti di integrazione il cui significato è fornito dalle relazioni

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h e^{-\mu}, \quad \frac{dt}{ds} = k c^{-2} e^{-\nu}. \tag{6}$$

2. La (3) è formalmente identica alla prima legge di Kepler. Se si vuole che risulti anche $r^2 d\varphi/dt = \text{cost.}$ (espressione formale della seconda legge di Kepler) si dovrà porre, per le (6), (4), $\alpha = 0$. In questo caso si ha quindi da considerare lo spazio-tempo la cui metrica è assegnata da

$$ds^2 = -(1 + \beta u)(dr^2 + r^2 d\varphi^2 - c^2 dt^2). \tag{7}$$

Nel caso in esame si è condotti, per note considerazioni, a porre $-\beta = 2 f M/c^2$, essendo f la costante d'attrazione newtoniana ed M la massa del Sole; se ne trae $\beta = -2m = -$ km. 2,94.

Si può affermare, nel caso presente, che il moto di un punto materiale intorno al Sole soddisfa, nel sistema di coordinate adottato, alle prime due leggi di Kepler. Dalla (7) si deduce che i raggi luminosi, il cui cammino è segnato dalle geodetiche di lunghezza nulla, non subiscono deflessione nel campo gravitazionale; si deduce altresì una influenza del campo stesso sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura identica a quella dedotta da Einstein.

3. Un altro caso, degno di nota, si ottiene ponendo $\beta = 0$ nelle (4), per cui si ha

$$ds^2 = -(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + \frac{c^2}{1 + \alpha u} dt^2. \tag{8}$$

Si è condotti ad attribuire ad α il valore $2m =$ km 2,94 e si può affermare che il moto di un punto materiale intorno al Sole soddisfa alla prima ma non alla seconda legge di Kepler. Si deduce che un raggio stellare, rasente il bordo solare, dovrebbe subire una deflessione di 0″,88, pari alla metà di quella preveduta da Einstein, e si ricava pure una influenza del campo di gravitazione sul numero delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella indicata da Einstein.

4. Si possono attribuire ad α, β valori tali da condurre, nello stesso tempo, ad una deflessione di un raggio stellare, che passi rasente il bordo solare, pari a quella dedotta da Einstein (1″,75) e ad una influenza del campo gravitazionale sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella indicata da Einstein. Basta porre, a

tale scopo, $\alpha = 4m$, $\beta = 2m$. essendo $m =$ km. 1,47, ossia basta considerare lo spazio-tempo la cui metrica è assegnata da

$$ds^2 = -(1 + 2\,mu)(dr^2 + r^2\,d\varphi^2) + c^2\,\frac{1 + 2\,mu}{1 + 4\,mu}\,dt^2\,. \tag{9}$$

Dalla (9) non si deduce, ovviamente, per il moto di un punto materiale intorno al Sole, la relazione $r^2\,d\varphi/dt =$ cost.

5. Per i casi esaminati, che si presentano come i più interessanti, si può affermare che quando si tratti di moti lenti intorno al Sole (cioè quando siano piccoli i rapporti delle velocità dei punti materiali alla velocità della luce) valgono, almeno in via approssimativa, le tre leggi di Kepler. Queste, nei casi esaminati, possono ritenersi valide, a meno di quantità trascurabili, per il moto dei pianeti.

Matematica. — *Nuova condizione necessaria per un estremo di un integrale doppio.* Nota II di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa Nota dimostrerò il *Teorema A* enunciato al n. 2 della precedente, e avrò anche occasione di fare qualche osservazione concernente quel teorema e qualche altra concernente la teoria dei problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari autoaggiunte, del tipo ellittico, alle derivate parziali del second'ordine.

1. Si abbia l'espressione, lineare autoaggiunta alle derivate parziali,

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(R_{11}\,\frac{\partial u}{\partial x} + R_{12}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(R_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x} + R_{22}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Bu\,,$$

ove le funzioni R_{11}, R_{12}, R_{22}, B, con le derivate parziali del primo ordine per le R_{11}, R_{12}, R_{22}, sono finite e continue nel dominio D considerato al n. 1 della Nota I, e soddisfano ivi alle limitazioni

$$R_{11}(x\,,y) > 0\,,\quad R_{11}(x\,,y)\,R_{22}(x\,,y) - R_{12}^2(x\,,y) > 0\,,\quad B(x\,,y) \leq 0\,.$$

Nel caso particolare che il dominio D sia semplicemente connesso e che ivi risulti $R_{11} \equiv R_{22}$, $R_{12} \equiv 0$, $B \equiv 0$, Hilbert [1] ha dimostrato l'esistenza della funzione di Green relativa all'espressione $L(u)$ e alla condizione al contorno $u(x\,,y)$ su $C = 0$. Ora è possibile estendere il procedimento seguìto da Hilbert, per dimostrare tale esistenza, anche nelle ipotesi più generali che noi facciamo sulla $L(u)$ e sul dominio D. *Basta solo ammettere* (come

[1] Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Teubner, 1912], pp. 58-73.