ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXIX.

1922

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1922

tale scopo, $\alpha = 4m$, $\beta = 2m$. essendo $m =$ km. 1,47, ossia basta considerare lo spazio-tempo la cui metrica è assegnata da

$$ds^2 = -(1+2mu)(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + c^2 \frac{1+2mu}{1+4mu} dt^2 . \tag{9}$$

Dalla (9) non si deduce, ovviamente, per il moto di un punto materiale intorno al Sole, la relazione $r^2 d\varphi/dt =$ cost.

5. Per i casi esaminati, che si presentano come i più interessanti, si può affermare che quando si tratti di moti lenti intorno al Sole (cioè quando siano piccoli i rapporti delle velocità dei punti materiali alla velocità della luce) valgono, almeno in via approssimativa, le tre leggi di Kepler. Queste, nei casi esaminati, possono ritenersi valide, a meno di quantità trascurabili, per il moto dei pianeti.

Matematica. — *Nuova condizione necessaria per un estremo di un integrale doppio.* Nota II di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In questa Nota dimostrerò il *Teorema A* enunciato al n. 2 della precedente, e avrò anche occasione di fare qualche osservazione concernente quel teorema e qualche altra concernente la teoria dei problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari autoaggiunte, del tipo ellittico, alle derivate parziali del second'ordine.

1. Si abbia l'espressione, lineare autoaggiunta alle derivate parziali,

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(R_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + R_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(R_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + R_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Bu ,$$

ove le funzioni R_{11}, R_{12}, R_{22}, B, con le derivate parziali del primo ordine per le R_{11}, R_{12}, R_{22}, sono finite e continue nel dominio D considerato al n. 1 della Nota I, e soddisfano ivi alle limitazioni

$$R_{11}(x,y) > 0 , \quad R_{11}(x,y)\, R_{22}(x,y) - R_{12}^2(x,y) > 0 , \quad B(x,y) \leq 0 .$$

Nel caso particolare che il dominio D sia semplicemente connesso e che ivi risulti $R_{11} \equiv R_{22}$, $R_{12} \equiv 0$, $B \equiv 0$, Hilbert [1] ha dimostrato l'esistenza della funzione di Green relativa all'espressione $L(u)$ e alla condizione al contorno $u(x,y)$ su $C = 0$. Ora è possibile estendere il procedimento seguìto da Hilbert, per dimostrare tale esistenza, anche nelle ipotesi più generali che noi facciamo sulla $L(u)$ e sul dominio D. *Basta solo ammettere* (come

[1] Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* [Teubner, 1912], pp. 58-73.

appunto fa Hilbert nel caso da lui considerato) *l'esistenza, per il dominio D della funzione di Green, relativa alla stessa condizione al contorno e alla espressione* $\Delta_2 u$ (1).

Indicando con

$$g(xy\,,\xi\eta) = g_2(xy\,,\xi\eta) - g_1(xy\,,\xi\eta)\log\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\,,$$

la funzione che, per ogni punto $(x\,,y)$, interno a D, rappresenta, nelle variabili ξ e η, la soluzione fondamentale dell'equazione $L(u)=0$, nulla su C, si trova che l'indicata funzione di Green è data da

$$G(xy\,.\,\xi\eta) = \frac{1}{\pi}\,\frac{g(xy\,,\xi\eta)}{R_{11}(xy)+R_{22}(xy)}\,,$$

ed inoltre che, se $\varphi(x\,.\,y)$ rappresenta una qualsivoglia funzione definita in D, *ivi continua con le sue derivate parziali del primo ordine*, ogni soluzione finita e continua in D con le sue derivate parziali dei due primi ordini delle due equazioni

$$\text{(1)}\qquad L(u)+\varphi(x\,.\,y)=0\,,\qquad u \text{ su } C=0\,,$$

è data da

$$\text{(2)}\qquad u(xy) = \iint_D G(xy\,,\xi\eta)\,\varphi(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

e, viceversa, dalla (2) segue la continuità in D di u e delle sue derivate parziali dei due primi ordini, e seguono le (1).

2. Consideriamo ora l'equazione

$$\text{(3)}\qquad L(u)+\lambda A u = 0\,,$$

contenente il parametro λ, ove la A designa una funzione definita in D, ivi finita e continua con le sue derivate parziali del primo ordine. Sia λ_n un autovalore di λ relativo alla condizione al contorno u su $C=0$, e sia u_n l'autosoluzione corrispondente, la quale potrà dipendere, linearmente ed omogeneamente, da parecchie costanti arbitrarie (2). Questi autovalori dànno tutti e soli gli zeri della funzione $\Delta(\lambda)$, intera in λ, esprimente il deter-

(1) Senza far questa ipotesi, introducendo però altre ipotesi qualitative, più restrittive per il contorno di D e per i coefficienti di $L(u)$, si perviene facilmente all'esistenza della indicata funzione di Green, anche con i procedimenti di E. E. Levi, da lui dati nella Memoria *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*. (Memorie della Società italiana delle scienze, tom. XVI, serie 3a), pp. 61-70.

(2) È ben nota l'esistenza di un'infinità di autovalori. Essi sono tutti reali ed hanno il punto ∞ per unico punto limite. All'esistenza ed al calcolo degli autovalori e delle autosoluzioni si perviene anche mediante una facile estensione dei procedimenti da me dati nella mia *Tesi d'abilitazione* (citata nella Nota I) ai n. 29, 30 e 31.

minante dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(xy) = \lambda \iint_D G(xy, \xi\eta)\, A(\xi\eta)\, u(\xi\eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{4}$$

cioè gli autovalori λ_n sono tutti e soli gli autovalori di λ per questa equazione. Le autosoluzioni della (3) dànno tutte e sole le autosoluzioni della (4)

Dalla (3) e dalla u_n su $C = 0$, si deduce

$$\lambda_n \iint_D A u_n^2\, dx\, dy = \iint_D \left[R_{11}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + 2 R_{12} \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial y} + R_{22}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy - \iint_D B u_n^2\, dx\, dy, \tag{5}$$

e quindi, per $\lambda_n > 0$,

$$\iint_D A u_n^2\, dx\, dy > 0. \tag{6}$$

3. Per dimostrare il *Teorema A*, dovremo considerare la $L(u)$ nel caso particolare $B \equiv 0$. Sia $z = z_0(x, y)$ l'estremale per l'integrale $J(z)$, a cui si riferiscono le funzioni $R_{11}, R_{12}, R_{22}, A$. Per ogni autosoluzione u_n, si può determinare un numero positivo ϱ_n tale che, per $|\varepsilon| < \varrho_n$, la superficie $z = z_0 + \varepsilon u_n$ appartenga all'insieme S e, di più, la differenza $J(z_0 + \varepsilon u_n) - J(z_0)$ abbia il segno di

$$I(u_n) \equiv \iint_D \left[R_{11}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + 2 R_{12} \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial y} + R_{22}\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy - \iint_D A u_n^2\, dx\, dy.$$

Supposta non soddisfatta la condizione espressa dal *Teorema A*, indichiamo con $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di λ *interni* all'intervallo $(0, 1)$; si avrà allora, in forza delle (5) e (6), $I(u_n) < 0$, per $n = 0, 1, \dots, k$, e quindi,

$$\text{per } |\varepsilon| < \varrho_n, \quad J(z_0 + \varepsilon u_n) - J(z_0) < 0 \quad (n = 0, 1, \dots, k).$$

La superficie $z = z_0(x, y)$ non potrà dunque fornire un minimo, nell'insieme S, per l'integrale $J(z)$.

4. Poichè le funzioni z_0 e $z_0 + \varepsilon u_n$ risultano in D finite e continue con le loro derivate dei primi due ordini, possiamo osservare che:

La condizione, espressa dal Teorema A, *per un minimo dell'integrale* $J(z)$, *è necessaria anche se il minimo deve aver luogo solamente per quella porzione dell'insieme* S, *costituita dalle superficie* $z = z(x, y)$, *per le quali le funzioni* $z(x, y)$ *sono in* D *finite e continue con le loro derivate parziali dei primi* due *ordini.*

5. Domandiamo, ora, in primo luogo, la condizione necessaria, espressa dal *Teorema A*, è forse equivalente a quella data dal Sommerfeld (loc. cit. nella Nota I)? Tale equivalenza si riscontra nel caso particolare che D si riduca ad un rettangolo o ad un cerchio e che in D sia $R_{12} \equiv 0$, $R_{11} \equiv R_{22} \equiv 1$, $A(x, y) \equiv k^2$, con k costante. Il rispondere ora, in tutta generalità, alla domanda posta, appare assai difficile. Occorrerebbe possedere — ciò che avrebbe, anche per di sè, un grandissimo interesse — più precise nozioni sulle linee di D, luogo, per i varî valori di λ, dei punti di zero delle soluzioni della (3).

Domandiamo, in secondo luogo, per un minimo debole dell'integrale $J(z)$ è sufficiente la condizione espressa dal *Teorema B* enunciato in principio della Nota I? È sufficiente, cioè, che la funzione intiera $\varDelta(\lambda)$ si conservi sempre diversa da zero, in tutto l'intervallo $(0, 1)$? Per rispondere affermativamente basterebbe dimostrare che, soddisfatta questa condizione, se cioè $\varDelta(\lambda) > 0$ per $0 \leq \lambda \leq 1$, l'equazione $L(u) + Au = 0$ possiede una soluzione sempre diversa da zero in tutto D. Di ciò mi propongo di trattare in una Nota futura.

Matematica. — *Sulle successioni di funzioni assolutamente continue, convergenti in media.* Nota di Carlo Severini, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

Mi propongo d'indicare in questa Nota un criterio notevole per riconoscere la convergenza uniforme di una successione, convergente in media, i cui termini siano funzioni assolutamente continue, aventi derivate sommabili insieme coi loro quadrati. Il criterio ha particolare importanza per lo studio delle serie di funzioni ortogonali e normali, soddisfacenti alle condizioni ora dette.

1. Le funzioni:

$$f_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

definite in un intervallo finito (a, b) $(a < b)$, siano ivi assolutamente continue, abbiano le derivate sommabili insieme coi loro quadrati, e costituiscano una successione convergente in media, rispetto ad una funzione caratteristica $p(x)$ misurabile, limitata, avente un limite inferiore l maggiore di zero, tale cioè da avere, essendo p un numero intero positivo qualsivoglia, indipendente da n:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b p(x) \Big[f_n(x) - f_{n+p}(x) \Big]^2 dx = 0. \tag{2}$$